

Méthode d'entropie relative pour la limite diffusive de systèmes hyperboliques

avec Christophe Berthon et Marianne Bessemoulin

Laboratoire Jean Leray – Université de Nantes

13-16 mai 2015
MODTERCOM



Cadre continu

- Système hyperbolique avec terme source

$$\partial_t W + \partial_x f(W) = R(W) \quad (H)$$

- Asymptotique en $t \rightarrow +\infty$ vers un système diffusif

$$\partial_t \bar{W} - \partial_x (D(\bar{W})(\partial_x \bar{W})) = 0 \quad (P)$$

Cadre continu

- Système hyperbolique avec terme source

$$\partial_t W + \partial_x f(W) = R(W) \quad (H)$$

- Asymptotique en $t \rightarrow +\infty$ vers un système diffusif

$$\partial_t \bar{W} - \partial_x (D(\bar{W})(\partial_x \bar{W})) = 0 \quad (P)$$

- Etat de l'art (très vaste)

- ▶ Cadre général : van Duyn–Peletier 77
- ▶ Télégraphe–chaleur : Nishihara 96 ; p -système avec friction–milieux poreux : Hsiao–Liu 92, Nishihara 96, Mei 10
- ▶ Estimations d'énergie, introduction d'un système intermédiaire, solution autosimilaire

$$\|W - \bar{W}\|_{L^2}(t) = O(1)t^{-1/2}$$

- ✘ Méthodes difficilement transposables au niveau discret

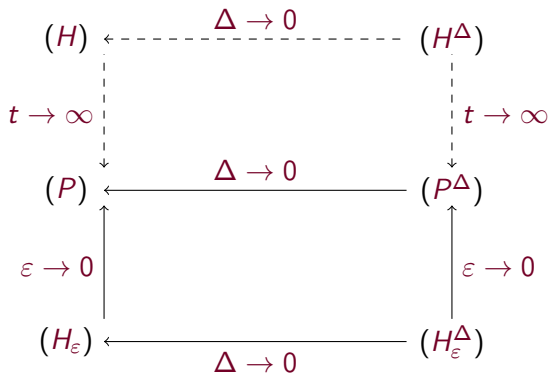
Cadre continu : changement d'échelle

- Mise en évidence d'un paramètre de relaxation ε
- Système hyperbolique avec terme source de relaxation

$$\varepsilon^2 \partial_t W_\varepsilon + \partial_x f(W_\varepsilon) = R(W_\varepsilon) \quad (H_\varepsilon)$$

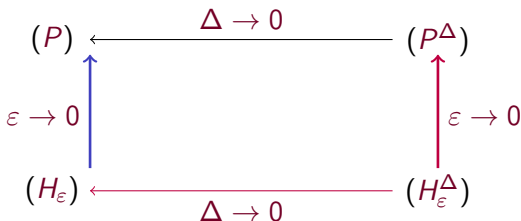
- Asymptotique en $\varepsilon \rightarrow 0$ vers (P)
- Lattanzio–Tzavaras 12 : convergence des solutions faibles entropiques de (H_ε) vers les solutions régulières de (P) en ε^4
- Méthode d'entropie relative
- ✔ Transposition au niveau discret

Compréhension du diagramme



- Etude en temps long
 - ▶ Continu : Hsiao–Liu, Nishihara
 - ▶ Discret : ANR Achylles (R. Turpault)

Compréhension du diagramme



Asymptotique $\epsilon \rightarrow 0$

Continu : Lattanzio–Tzavaras 12 par méthode d'entropie relative

- ▶ Télégraphe–chaleur, **p-système–milieux poreux**
- ▶ Formalisme général ?

✔ **Discret** : adaptation de l'**entropie relative**

- ▶ Schéma “préservant” l'asymptotique
- ▶ Etude de la **convergence** $\Delta \rightarrow 0$
- ▶ **Vitesse de convergence** pour l'asymptotique $\epsilon \rightarrow 0$

Plan de l'exposé

- 0 Motivations
- 1 Le p -système avec friction (H_ε) et la limite diffusive (P)
- 2 L'entropie relative dans le cadre continu
- 3 Une classe de schémas (H_ε^Δ)
- 4 Convergence en semi-discret

Du p -système avec friction (H_ε) à la limite (P)

Dynamique isotherme lagrangienne d'un gaz de covolume τ et de vitesse u

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = -\sigma u \end{cases} \quad (H)$$

Changement d'échelle (Naldi–Pareschi 98, Mei 10) : $t := t/\varepsilon^2$, $x := x/\varepsilon$,
 $u_\varepsilon := \varepsilon u$

$$\begin{cases} \partial_t \tau_\varepsilon - \partial_x u_\varepsilon = 0 \\ \varepsilon \partial_t u_\varepsilon + \partial_x p(\tau_\varepsilon) = -\sigma u_\varepsilon \end{cases} \quad (H_\varepsilon)$$

Limite $\varepsilon \rightarrow 0$: développement de Chapman-Enskog

$$\tau_\varepsilon = \bar{\tau} + \varepsilon \tau_1 + \dots$$

$$u_\varepsilon = \bar{u} + \varepsilon u_1 + \dots$$

Terme à l'ordre ε^0 : équation des milieux poreux

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\tau} - \partial_x \bar{u} = 0 \\ \partial_x p(\bar{\tau}) = -\sigma \bar{u} \end{cases} \quad (P)$$

Remarque sur le changement d'échelle

- Autre changement d'échelle :

$$t := t/\varepsilon^2, \quad x := x/\varepsilon$$

- Développement Chapman–Enskog mène à

$$\bar{u} = 0$$

$$\partial_x p(\bar{\tau}) = -\sigma u_1$$

$$\partial_t \bar{\tau} - \partial_x u_1 = 0$$

- Numériquement, difficile de retrouver le terme u_1 quand $\varepsilon \rightarrow 0$
- ✔ Changement d'échelle cinétique : permet de récupérer les termes du même ordre

Hypothèses sur les données

- Etats constants à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tau = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{\tau}_\varepsilon = \tilde{\tau}_\pm$$

- $\bar{\tau} \geq c > 0$
- Pression $p \in C^2(]0, +\infty[)$ du type loi γ convexe

$$p(s) = s^{-\gamma}, \quad \gamma > 1, \quad p'(s) < 0$$

Plan de l'exposé

- 0 Motivations
- 1 Le p -système avec friction (H_ε) et la limite diffusive (P)
- 2 **L'entropie relative dans le cadre continu**
- 3 Une classe de schémas (H_ε^Δ)
- 4 Convergence en semi-discret

Convergence de (H_ε) vers (P) : Lattanzio–Tzavaras 12

- Entropie relative : permet de “mesurer” l'écart entre les solution (τ, u) de (H_ε) et $(\bar{\tau}, \bar{u})$ de (P)
- Basée sur l'entropie de (H_ε) et un système (P) modifié

Définition de l'entropie relative

(η^ε, ψ) couple entropie-flux pour (H_ε) tel que

$$\partial_t \eta^\varepsilon(\tau, u) + \partial_x \psi(\tau, u) = -\sigma u^2 \quad (1)$$

avec

$$\eta^\varepsilon(\tau, u) = \varepsilon^2 \frac{u^2}{2} - P(\tau), \quad \psi(\tau, u) = up(\tau)$$

et $P(\tau) = \int_0^\tau p(s)ds$ ou dire P primitive de p

Entropie relative

$$\eta^\varepsilon(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u}) := \eta^\varepsilon(\tau, u) - \eta^\varepsilon(\bar{\tau}, \bar{u}) - \nabla \eta^\varepsilon(\bar{\tau}, \bar{u}) \cdot \begin{pmatrix} \tau - \bar{\tau} \\ u - \bar{u} \end{pmatrix}$$

Définition de l'entropie relative

(η^ε, ψ) couple entropie-flux pour (H_ε) tel que

$$\partial_t \eta^\varepsilon(\tau, u) + \partial_x \psi(\tau, u) = -\sigma u^2 \quad (1)$$

avec

$$\eta^\varepsilon(\tau, u) = \varepsilon^2 \frac{u^2}{2} - P(\tau), \quad \psi(\tau, u) = up(\tau)$$

Entropie relative

$$\begin{aligned} \eta^\varepsilon(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u}) &:= \eta^\varepsilon(\tau, u) - \eta^\varepsilon(\bar{\tau}, \bar{u}) - \nabla \eta^\varepsilon(\bar{\tau}, \bar{u}) \cdot \begin{pmatrix} \tau - \bar{\tau} \\ u - \bar{u} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} (u - \bar{u})^2 - P(\tau | \bar{\tau}) \end{aligned}$$

où $P(\tau | \bar{\tau}) = P(\tau) - P(\bar{\tau}) - p(\bar{\tau})(\tau - \bar{\tau})$

Convergence

Notons $\varphi^\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \eta^\varepsilon(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u}) dx$

Théorème (Lattanzio–Travaras 12)

Soit $(\bar{\tau}, \bar{u})$ solution régulière de (P) définie sur $Q_T = \mathbb{R} \times [0, T]$ tq $\bar{\tau} \geq c > 0$, $\|\partial_{xx} p(\bar{\tau})\|_{L^\infty(Q_T)}$, $\|\partial_{xt} p(\bar{\tau})\|_{L^2(Q_T)} \leq K < +\infty$. Soit (τ, u) solution de (H_ε) tq $\varphi^\varepsilon(0) < +\infty$.

Alors on a l'estimation

$$\varphi^\varepsilon(t) \leq B(\varphi^\varepsilon(0) + \varepsilon^4), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

où $B := B(T, \partial_{xx} p(\bar{\tau}), \partial_{xt} p(\bar{\tau}), \bar{\tau})$.

Si $\varphi^\varepsilon(0) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, alors

$$\sup_{t \in [0, T]} \varphi^\varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Idée de preuve

1^{ère} étape : écrire une équation vérifiée par l'entropie relative

- Besoin de construire un système (P) modifié

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\tau} - \bar{\partial}_x u = 0 \\ \partial_x p(\bar{\tau}) = -\sigma \bar{u} \end{cases} \quad (P)$$

Idée de preuve

1^{ère} étape : écrire une équation vérifiée par l'entropie relative

- Besoin de construire un système (\tilde{P}) modifié

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\tau} - \bar{\partial}_x u = 0 \\ \partial_t \bar{\tau} + \partial_x p(\bar{\tau}) = -\sigma \bar{u} + \partial_t \bar{\tau} \end{cases} \quad (\tilde{P})$$

Idée de preuve

1^{ère} étape : écrire une équation vérifiée par l'entropie relative

- Besoin de construire un système (P) modifié

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\tau} - \bar{\partial}_x u = 0 \\ \partial_t \bar{\tau} + \partial_x p(\bar{\tau}) = -\sigma \bar{u} + \partial_t \bar{\tau} \end{cases} \quad (\tilde{P})$$

- Calcul de $\partial_t \eta^\varepsilon(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u})$

Idée de preuve

1^{ère} étape : écrire une équation vérifiée par l'entropie relative

- Besoin de construire un système (P) modifié

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\tau} - \bar{\partial}_x u = 0 \\ \partial_t \bar{\tau} + \partial_x p(\bar{\tau}) = -\sigma \bar{u} + \partial_t \bar{\tau} \end{cases} \quad (\tilde{P})$$

- Calcul de $\partial_t \eta^\varepsilon(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u})$

$$\begin{aligned} \partial_t \eta^\varepsilon(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u}) &= -\partial_x \psi(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u}) \\ &\quad - \sigma (u - \bar{u})^2 + \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} p(\bar{\tau}) p(\tau | \bar{\tau}) + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \partial_{xt} p(\bar{\tau}) (u - \bar{u}) \end{aligned}$$

Idée de la preuve

2^{ème} étape : intégration sur $Q_T \mathbb{R} \times [0, T)$ pour obtenir une estimation sur $\varphi^\varepsilon(t)$, $t \in [0, T)$

$$\int_{Q_T} \partial_t \eta^\varepsilon(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u}) ds dx = \int_{Q_T} \left(-\partial_x \psi(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u}) - \sigma(u - \bar{u})^2 + \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} p(\bar{\tau}) p(\tau | \bar{\tau}) + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \partial_{xt} p(\bar{\tau}) (u - \bar{u}) \right) ds dx$$

Idée de la preuve

2^{ème} étape : intégration sur $Q_T \mathbb{R} \times [0, T)$ pour obtenir une estimation sur $\varphi^\varepsilon(t)$, $t \in [0, T)$

$$\begin{aligned} \varphi^\varepsilon(t) - \varphi^\varepsilon(0) = \int_{Q_T} & \left(-\sigma(u - \bar{u})^2 + \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} p(\bar{\tau}) p(\tau | \bar{\tau}) \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \partial_{xt} p(\bar{\tau}) (u - \bar{u}) \right) ds dx \end{aligned}$$

- Définition de φ^ε
- Hypothèses sur les flux : $\psi(\tau, u | \bar{\tau}, \bar{u}) \rightarrow 0$ en $\pm\infty$
- **Dissipation d'entropie sur u**
- 2 termes à contrôler : **dissipation d'entropie sur τ** , **terme en temps**
- Lemme de Grönwall

Contrôle de la dissipation sur τ

Lemme

Il existe une constante $C > 0$ telle que, $\forall \tau, \bar{\tau} \geq c > 0$

$$|p(\tau|\bar{\tau})| \leq -CP(\tau|\bar{\tau})$$

Preuve : $p \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$ et $p'(\tau) \leq -m < 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \int_{Q_T} \partial_{xx} p(\bar{\tau}) p(\tau|\bar{\tau}) &\leq -\frac{\|\partial_{xx} p(\bar{\tau})\|_{L^\infty(Q_T)} C}{\sigma} \int_{Q_T} P(\tau|\bar{\tau}) ds dx \\ &\leq \frac{\|\partial_{xx} p(\bar{\tau})\|_{L^\infty(Q_T)} C}{\sigma} \int_0^t \varphi^\varepsilon(s) ds \end{aligned}$$

Contrôle du terme en temps

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \int_{Q_T} |\partial_{xt} p(\bar{\tau})(u - \bar{u})| ds dx \\ & \leq \frac{\sigma}{2} \int_{Q_T} (u - \bar{u})^2 ds dx + \frac{\varepsilon^4}{2\sigma^3} \int_{Q_T} |\partial_{xt} p(\bar{\tau})|^2 ds dx \\ & \leq \frac{\sigma}{2} \int_{Q_T} (u - \bar{u})^2 ds dx + \frac{\varepsilon^4 \|\partial_{xt} p(\bar{\tau})\|_{L^2(Q_T)}^2}{2\sigma^3} \\ & \leq \frac{\sigma}{2} \int_0^t \varphi^\varepsilon(s) ds + \frac{\varepsilon^4 \|\partial_{xt} p(\bar{\tau})\|_{L^2(Q_T)}^2}{2\sigma^3} \end{aligned}$$

- Cauchy-Schwartz, Young, contrôle de la norme de $\|\partial_{xt} p(\bar{\tau})\|_{L^2(Q_T)}$

Plan de l'exposé

- 0 Motivations
- 1 Le p -système avec friction (H_ε) et la limite diffusive (P)
- 2 L'entropie relative dans le cadre continu
- 3 Une classe de schémas (H_ε^Δ)
- 4 Convergence en semi-discret

Du continu au discret

$$\begin{cases} \partial_t \tau_\varepsilon - \partial_x u_\varepsilon = 0 \\ \varepsilon \partial_t u_\varepsilon + \partial_x p(\tau_\varepsilon) = -\sigma u_\varepsilon \end{cases} \quad (H_\varepsilon)$$

Besoin d'un schéma qui préserve l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$

Définition d'un schéma AP

- Consistant à la limite : consistant avec les solutions de $(H_\varepsilon) \forall \varepsilon > 0$ et si, à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, converge vers un schéma consistant avec (P)
- Stable : $\forall \varepsilon > 0$, le pas de temps Δt de (H_ε^Δ) est tel que $\Delta t \leq C \Delta x$ alors que le pas de temps de (P^Δ) est de la forme $\Delta t \leq C \Delta x^2$

Étude sur une classe de schéma semi-discret

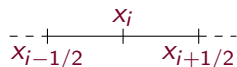
- Jin–Pareschi–Toscani 98 : AP, étude de la convergence
- Berthon–Crestetto–Foucher 14 : consistant à la limite, CFL dépend de ε

Du continu au discret

$$\begin{cases} \partial_t \tau = \partial_x u \\ \partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_x p(\tau) - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} u \end{cases} \quad (H_\varepsilon)$$

Passage au semi-discret en espace

- Pas d'espace $\Delta x = x_{i+1} - x_i$



- Discrétisation volumes finis : $u_i(t) \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(t, x) dx$
- Flux HLL, λ plus grande vitesse d'onde

$$\begin{cases} \partial_t \tau_i = \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1} + \lambda(\tau_{i+1} - 2\tau_i + \tau_{i-1})) \\ \partial_t u_i = \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \\ \quad - \frac{1}{2\varepsilon^2 \Delta x} (p(\tau_{i+1}) - p(\tau_{i-1})) - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} u_i \end{cases} \quad (H_\varepsilon^\Delta)$$

Du continu au discret

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau_i = \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1} + \lambda(\tau_{i+1} - 2\tau_i + \tau_{i-1})) \\ \partial_t u_i = \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \\ \quad - \frac{1}{2\varepsilon^2 \Delta x} (p(\tau_{i+1}) - p(\tau_{i-1})) - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} u_i \end{array} \right. \quad (H_\varepsilon^\Delta)$$

Schéma limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \bar{\tau}_i = \frac{1}{2\Delta x} (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}) + \lambda(\bar{\tau}_{i+1} - 2\bar{\tau}_i + \bar{\tau}_{i-1}) \\ \sigma \bar{u}_i = -\frac{1}{2\Delta x} (p(\bar{\tau}_{i+1}) - p(\bar{\tau}_{i-1})) \end{array} \right. \quad (P^\Delta)$$

Plan de l'exposé

- 0 Motivations
- 1 Le p -système avec friction (H_ε) et la limite diffusive (P)
- 2 L'entropie relative dans le cadre continu
- 3 Une classe de schémas (H_ε^Δ)
- 4 **Convergence en semi-discret**

Convergence du schéma

Théorème

Soit $(\bar{\tau}_i(t), \bar{u}_i(t))_{i \in \mathbb{Z}}$ une solution régulière de (P^Δ) définie sur Q_T telle que

$$\|D_{tx}p(\bar{\tau})\|_{L^2(Q_T)} \leq K < +\infty, \quad \|D_{xx}p(\bar{\tau})\|_{L^\infty(Q_T)} \leq K$$

et

$$\|D_{xx}\bar{\tau}\|_{L^\infty(Q_T)} \leq K, \quad \|D_x\bar{\tau}\|_{L^\infty(Q_T)} \leq K, \quad \|D_{xx}\bar{u}\|_{L^\infty(Q_T)} \leq K.$$

Soit $(\tau_i(t), u_i(t))_{i \in \mathbb{Z}}$ une solution de (H_ε^Δ) telle que $\varphi^\varepsilon(0) < +\infty$.

Alors

$$\varphi^\varepsilon(t) \leq B(\varphi^\varepsilon(0) + \varepsilon^4), \quad t \in [0, T),$$

où $B := B(T, p, \bar{\tau}, \bar{u})$.

De plus si $\varphi^\varepsilon(0) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ alors $\sup_{t \in [0, T)} \varphi^\varepsilon(t) \rightarrow 0$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$

Idée de preuve

1^{ère} étape : définir l'entropie relative discrète

- Repose sur la définition de l'entropie relative

$$\eta_i^\varepsilon := \eta^\varepsilon(\tau_i, u_i | \bar{\tau}_i, \bar{u}_i) = \frac{\varepsilon^2}{2}(u_i - \bar{u}_i)^2 - P(\tau_i | \bar{\tau}_i)$$

- Comme en continu, on écrit l'équation vérifiée par η_i^ε

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i^\varepsilon}{dt} &= -\frac{1}{\Delta x}(\psi_{i+1/2} - \psi_{i-1/2}) - \sigma(u_i - \bar{u}_i)^2 \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{\sigma}(u_i - \bar{u}_i) \frac{d}{dt} \left(\frac{p(\bar{\tau}_{i+1}) - p(\bar{\tau}_{i-1})}{2\Delta x} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma} \frac{p(\bar{\tau}_{i+2}) - 2p(\bar{\tau}_i) + p(\bar{\tau}_{i-2}))}{(2\Delta x)^2} p(\tau_i | \bar{\tau}_i) \\ &\quad + R_i^u + R_i^\tau \end{aligned} \tag{4}$$

Idée de preuve

1^{ère} étape : intégration discrète en espace

- Définir $\varphi^\varepsilon(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x \eta_i^\varepsilon(t)$
- Hypothèses sur les flux

$$\begin{aligned}\varphi^\varepsilon(t) - \varphi^\varepsilon(0) &= -\sigma \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (u_i - \bar{u}_i)^2(s) ds \\ &+ \frac{1}{\sigma} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x \frac{1}{(2\Delta x)^2} (\bar{p}_{i+2} - 2\bar{p}_i + \bar{p}_{i-2}) p(\tau_i | \bar{\tau}_i) ds \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (u_i - \bar{u}_i) \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_{i-1}}{2\Delta x} \right) ds \\ &+ \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (R_i^u + R_i^T) ds\end{aligned}$$

Idée de preuve

2^{ème} étape : contrôle des termes

- 3 premiers termes communs au cadre continu

$$\begin{aligned}\varphi^\varepsilon(t) &= \varphi^\varepsilon(0) - \sigma \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (u_i - \bar{u}_i)^2(s) ds \\ &+ \frac{C}{\sigma} \|D_{xx}p(\bar{\tau})\|_{L^\infty(Q_T)} \int_0^t \varphi^\varepsilon(s) ds \\ &+ \frac{\sigma}{2} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (u_i - \bar{u}_i)^2 ds + \frac{\varepsilon^4}{2\sigma^3} \|D_{tx}p(\bar{\tau})\|_{L^2(Q_T)}^2 \\ &+ \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (R_i^u + R_i^T) ds\end{aligned}$$

- Termes de reste $R_i^u + R_i^T$

Contrôle du terme R_i^u

$$\text{Rappel : } R_i^u = \frac{\lambda \varepsilon^2}{2\Delta x} (u_i - \bar{u}_i)(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

$$\int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x R_i^u ds \leq \frac{\lambda \theta}{2} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (u_i - \bar{u}_i)^2 ds + \frac{\varepsilon^4 \lambda}{2\theta} \|D_{xx} \bar{u}\|_{L^2(Q_T)}^2$$

- Faire apparaître \bar{u}_i dans le second terme
- Changement d'indice, Cauchy-Schwartz et inégalité de Young (x2)
- Hypothèse :

$$\|D_{xx} \bar{u}\|_{L^2(Q_T)}^2 := \sup_{t \in [0, T]} \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left| \frac{p(\bar{\tau}_{i+2}) - 2p(\bar{\tau}_i) + \bar{\tau}_{i-2})}{(2\Delta x)^2} \right| \leq K < +\infty$$

Contrôle du terme R_i^T

$$\text{Rappel : } R_i^T = -\frac{\lambda}{2\Delta x} ((p(\tau_i) - p(\bar{\tau}_i))(\tau_{i+1} - 2\tau_i + \tau_{i-1}) \\ - (\tau_i - \bar{\tau}_i)p'(\bar{\tau}_i)(\bar{\tau}_{i+1} - 2\bar{\tau}_i + \bar{\tau}_{i-1}))$$

$$\int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x R_i^T ds \leq D \int_0^t \varphi^\varepsilon(s) ds$$

- Décomposer $\int_0^T \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x R_i^T := T_1 + T_2$ avec

$$T_1 = \frac{\lambda}{2} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} -p(\tau_i | \bar{\tau}_i) (\bar{\tau}_{i+1} - 2\bar{\tau}_i + \bar{\tau}_{i-1}) ds$$

$$T_2 = -\frac{\lambda}{2} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} (p(\tau_i) - p(\bar{\tau}_i)) ((\tau_{i+1} - \bar{\tau}_{i+1}) \\ - 2(\tau_i - \bar{\tau}_i) + (\tau_{i-1} - \bar{\tau}_{i-1}))$$

Contrôle du terme R_i^T

- Contrôle de T_1 : $T_1 \leq Cste \|D_{xx}\bar{\tau}\|_{L^\infty(Q_T)} \int_0^t \varphi^\varepsilon(s) ds$
- Contrôle de T_2 : plus technique, fait intervenir $\|D_x\bar{\tau}\|_{L^\infty(Q_T)}$

Fin de preuve : on combine

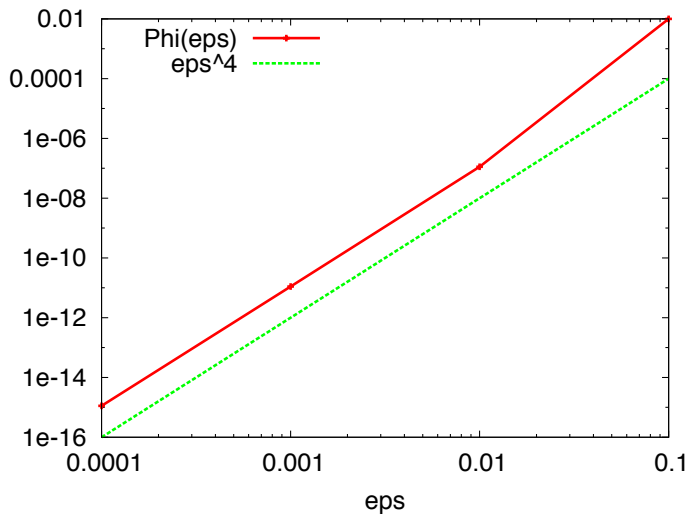
$$\begin{aligned}\varphi^\varepsilon(t) &\leq \varphi^\varepsilon(0) - \sigma \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (u_i - \bar{u}_i)^2(s) ds \\ &\quad + \frac{C}{\sigma} \|D_{xx} p(\bar{\tau})\|_{L^\infty(Q_T)} \int_0^t \varphi^\varepsilon(s) ds \\ &\quad + \frac{\sigma}{2} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (u_i - \bar{u}_i)^2 ds + \frac{\varepsilon^4}{2\sigma^3} \|D_{tx} p(\bar{\tau})\|_{L^2(Q_T)}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda\theta}{2} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x (u_i - \bar{u}_i)^2 ds + \frac{\varepsilon^4 \lambda}{2\theta} \|D_{xx} \bar{u}\|_{L^2(Q_T)}^2 \\ &\quad + D \int_0^t \varphi^\varepsilon(s) ds\end{aligned}$$

Conclusion en prenant $\theta \leq \frac{\sigma}{\lambda}$ i.e. tel que $-\sigma + \frac{\sigma}{2} + \frac{\lambda\theta}{2} \leq 0$

Illustrations numériques

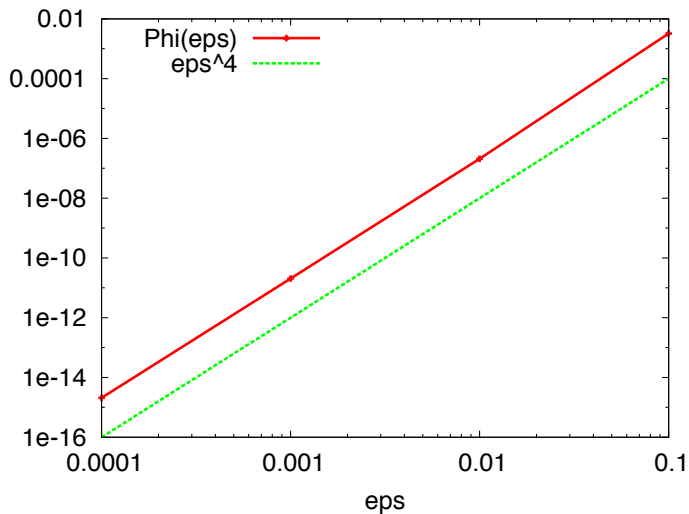
- Domaine de calcul $[-4, 4]$, 800 mailles, temps final = 10^{-2}
- Loi de pression $p(s) = s^{-1.4}$
- Coefficients : $\sigma = 1$, $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$
- Aux bords : Neumann homogènes
- Deux conditions initiales
 - ▶ Créneau : $\tau_0(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 - ▶ Régulière : $\tau_0(x) = \exp(-100x^2) + 1$

Illustrations numériques



Donnée initiale discontinue

Illustrations numériques



Donnée initiale continue

Perspectives

- ✔ Schéma full discret

Perspectives

✔ Schéma full discret

Jin–Pareschi–Toscani

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x}(\tau_i^{n+1/2} - \tau_i^n) + \frac{1}{\Delta x}(G_{i+1/2}^{n,\tau} - G_{i-1/2}^{n,\tau}) = 0 \\ \frac{1}{\Delta x}(u_i^{n+1/2} - u_i^n) + \frac{1}{\Delta x}(G_{i+1/2}^{n,u} - G_{i-1/2}^{n,u}) = 0 \\ \tau_i^{n+1} = \tau_i^{n+1/2} \\ u_i^{n+1} = u_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} \left(\sigma u_i^{n+1} + (1 - \varepsilon^2) \frac{\rho(\tau_{i+1/2}^{n+1} - \rho(\tau_{i-1/2}^{n+1}))}{2\Delta x} \right) \end{cases}$$

- ✔ Schéma full discret
- Continu : extension à d'autres modèles \rightarrow formalisme plus général ?
 - ▶ En cours avec Marianne Bessemoulin
 - ▶ Formalisme Berthon–LeFloch–Turpault

- ✔ Schéma full discret
 - Continu : extension à d'autres modèles \rightarrow formalisme plus général ?
 - ▶ En cours avec Marianne Bessemoulin
 - ▶ Formalisme Berthon–LeFloch–Turpault
 - Comprendre le lien entre les asymptotiques $t \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$

- ✔ Schéma full discret
 - Continu : extension à d'autres modèles \rightarrow formalisme plus général ?
 - ▶ En cours avec Marianne Bessemoulin
 - ▶ Formalisme Berthon–LeFloch–Turpault
 - Comprendre le lien entre les asymptotiques $t \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$

Merci de votre attention !