IRSN
INSTITUT
DE RADIOPROTECTION
ET DE SÛRETÉ NUCLÉAIRE

Une classe de schémas à mailles décalées consistants pour les équations d'Euler compressible.

N. Therme

En collaboration avec : L. Gastaldo, R. Herbin et J.C. Latché

Workshop MODTERCOM 2015, Porquerolles

16 mai 2015

IRSN/PSN-RES/SA2I/LIE

Sommaire

Sommaire

Équations d'Euler compressible

- Sur $(0,T) \times \Omega$, avec Ω ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$:
  - Bilan de masse :
  $$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\, \boldsymbol{u}) = 0$$
  - Bilan de quantité de mouvement :
  $$\partial_t(\rho\, \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} p = 0$$
  - Bilan d'énergie totale :
  $$\partial_t(\rho\, E) + \operatorname{div}(\rho\, E\, \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(p\, \boldsymbol{u}) = 0,$$
  - Loi d'état :
  $$p = (\gamma - 1)\, \rho\, e, \qquad E = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + e,$$
  - p : pression, ρ : masse volumique, E : Énergie totale, $\boldsymbol{u}$: vitesse, e : Énergie interne
- Conditions aux limites :
  - $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \geq \rho_{\min} > 0, \quad e|_{t=0} = e_0 \geq e_{\min} > 0$
- **Bilan d'énergie cinétique :**
$$\partial_t(\rho E_k) + \operatorname{div}\big(\rho\, E_k\, \boldsymbol{u}\big) + \boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad E_k = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2$$
- **Bilan d'énergie interne :**
$$\partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \boldsymbol{u}) + p \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

Équations d'Euler compressible

- Sur $(0, T) \times \Omega$, avec Ω ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$:
  - Bilan de masse :
  $$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\, \boldsymbol{u}) = 0$$
  - Bilan de quantité de mouvement :
  $$\partial_t(\rho\, \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} p = 0$$
  - Bilan d'énergie totale :
  $$\partial_t(\rho\, E) + \operatorname{div}(\rho\, E\, \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(p\, \boldsymbol{u}) = 0,$$
  - Loi d'état :
  $$p = (\gamma - 1)\, \rho\, e, \qquad E = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + e,$$
  - p : pression, ρ : masse volumique, E : Énergie totale, $\boldsymbol{u}$: vitesse, e : Énergie interne

- **Conditions aux limites** :
  - $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \;\; \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \;\; \rho|_{t=0} = \rho_0 \geq \rho_{\min} > 0, \;\; e|_{t=0} = e_0 \geq e_{\min} > 0$

- **Bilan d'énergie cinétique** :
$$\partial_t(\rho E_k) + \operatorname{div}\big(\rho\, E_k\, \boldsymbol{u}\big) + \boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad E_k = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2$$

- **Bilan d'énergie interne** :
$$\partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \boldsymbol{u}) + p \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

Équations d'Euler compressible

- Sur $(0, T) \times \Omega$, avec Ω ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$:
  - Bilan de masse :
  $$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u}) = 0$$
  - Bilan de quantité de mouvement :
  $$\partial_t(\rho\, \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} p = 0$$
  - Bilan d'énergie totale :
  $$\partial_t(\rho\, E) + \mathrm{div}(\rho\, E\, \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(p\, \boldsymbol{u}) = 0,$$
  - Loi d'état :
  $$p = (\gamma - 1)\, \rho\, e, \qquad E = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + e,$$
  - p : pression, ρ : masse volumique, E : Énergie totale, $\boldsymbol{u}$: vitesse, e : Énergie interne

- **Conditions aux limites** :
  - $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \ \ \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \ \ \rho|_{t=0} = \rho_0 \geq \rho_{\min} > 0, \ \ e|_{t=0} = e_0 \geq e_{\min} > 0$

- **Bilan d'énergie cinétique** :
$$\partial_t(\rho E_k) + \mathrm{div}\big(\rho\, E_k\, \boldsymbol{u}\big) + \boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad E_k = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2$$

- **Bilan d'énergie interne** :
$$\partial_t(\rho e) + \mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u}) + p\, \mathrm{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

Équations d'Euler compressible

- Sur $(0,T) \times \Omega$, avec Ω ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$:
  - Bilan de masse :
  $$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\, \boldsymbol{u}) = 0$$
  - Bilan de quantité de mouvement :
  $$\partial_t(\rho\, \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} p = 0$$
  - Bilan d'énergie totale :
  $$\partial_t(\rho\, E) + \operatorname{div}(\rho\, E\, \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(p\, \boldsymbol{u}) = 0,$$
  - Loi d'état :
  $$p = (\gamma - 1)\, \rho\, e, \qquad E = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + e,$$
  - p : pression, ρ : masse volumique, E : Énergie totale, $\boldsymbol{u}$: vitesse, e : Énergie interne

- **Conditions aux limites** :
  - $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \;\; \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \;\; \rho|_{t=0} = \rho_0 \geq \rho_{\min} > 0, \;\; e|_{t=0} = e_0 \geq e_{\min} > 0$

- **Bilan d'énergie cinétique** :
$$\partial_t(\rho E_k) + \operatorname{div}\big(\rho\, E_k\, \boldsymbol{u}\big) + \boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad E_k = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2$$

- **Bilan d'énergie interne** :
$$\partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \boldsymbol{u}) + p \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

Équations d'Euler compressible

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u}) = 0,\\
&\partial_t (\rho\, \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} p = 0,\\
&\partial_t (\rho e) + \mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u}) + p\, \mathrm{div} \boldsymbol{u} = 0,\\
&p = (\gamma - 1)\, \rho\, e,
\end{aligned}
$$

- Positivité de la masse volumique ρ
- e est positive pour tout $t \geq 0$:
  - Transport de l'énergie interne : $\partial_t(\rho e) + \mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u}) = \rho\, [\partial_t\, e + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, e]$,
  - La loi d'état implique que p s'annule pour $e = 0$.

Objectifs : conserver les bilans d'énergie au niveau discret ainsi que la stabilité de la solution.

Équations d'Euler compressible

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u}) = 0,\\
&\partial_t(\rho\, \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} p = 0,\\
&\partial_t(\rho e) + \mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u}) + p\, \mathrm{div} \boldsymbol{u} = 0,\\
&p = (\gamma - 1)\, \rho\, e,
\end{aligned}
$$

- Positivité de la masse volumique ρ
- e est positive pour tout $t \geq 0$:
  - Transport de l'énergie interne : $\partial_t(\rho e) + \mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u}) = \rho\, [\partial_t e + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} e]$,
  - La loi d'état implique que p s'annule pour $e = 0$.

Objectifs : conserver les bilans d'énergie au niveau discret ainsi que la stabilité de la solution.

Équations d'Euler compressible

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u}) = 0,\\
&\partial_t (\rho\, \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} p = 0,\\
&\partial_t (\rho e) + \mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u}) + p\, \mathrm{div} \boldsymbol{u} = 0,\\
&p = (\gamma - 1)\, \rho\, e,
\end{aligned}
$$

- Positivité de la masse volumique ρ
- e est positive pour tout $t \geq 0$:
  - Transport de l'énergie interne : $\partial_t (\rho e) + \mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u}) = \rho\, [\partial_t\, e + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, e]$,
  - La loi d'état implique que p s'annule pour $e = 0$.

Objectifs : conserver les bilans d'énergie au niveau discret ainsi que la stabilité de la solution.

Travaux précédents

- Gallouët, Gastaldo, Herbin, Latché (08) : Schémas correction de pression pour Navier-Stokes barotrope.
- Herbin, Kheriji, Latché (13) : Schémas correction de pression pour Euler et Navier-Stokes compressible.
- Herbin, Latché, Nguyen (14) : Euler explicite.

Sommaire

Discrétisation spatiale

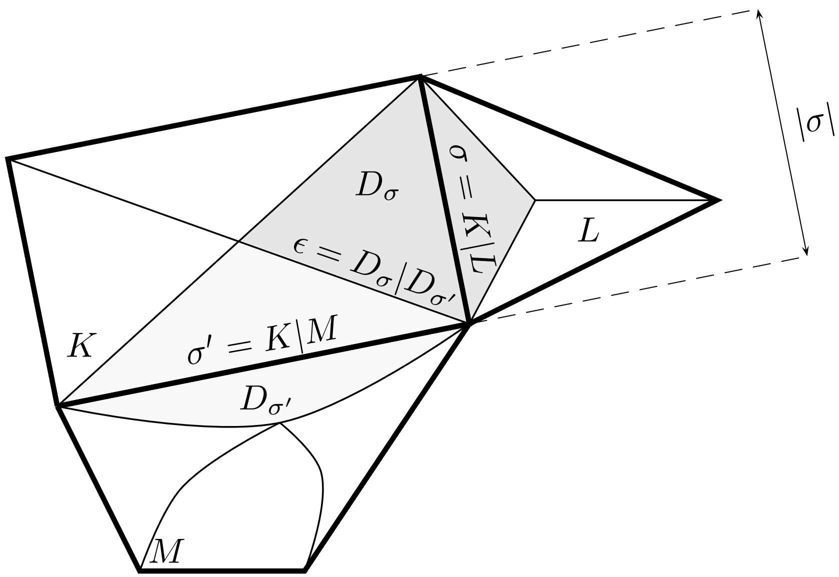
Les schémas développés à l'IRSN doivent pouvoir traiter des écoulements sur une large gamme de nombre de Mach (Navier-Stokes compressible et incompressible, Euler). On adopte une stratégie de discrétisation sur mailles décalées, issue des méthodes pour l'incompressible :

- Maillage primal : $\mathcal{M} = \{$ensemble de volumes de contrôle $K\}$. K quadrilatère/triangle convexe en 2D, hexaèdre/tetraèdre convexe en 3D.
- Variables scalaires au centre des cellules du maillage primal : $(\rho_K)_{K\in\mathcal{M}}$, $(p_K)_{K\in\mathcal{M}}$, $(e_K)_{K\in\mathcal{M}}$.
- Vitesse aux interfaces : $(u_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}}$.
- Maillage dual : $\mathcal{D} = (D_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}} = \{$ensemble des mailles duales$\}$.

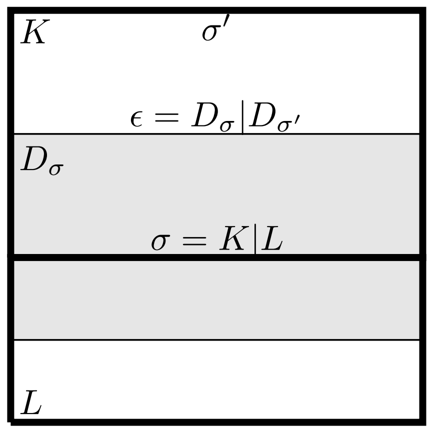
Discrétisation spatiale

Les schémas développés à l'IRSN doivent pouvoir traiter des écoulements sur une large gamme de nombre de Mach (Navier-Stokes compressible et incompressible, Euler). On adopte une stratégie de discrétisation sur mailles décalées, issue des méthodes pour l'incompressible :

- Maillage primal : $\mathcal{M} = \{$ensemble de volumes de contrôle $K\}$. K quadrilatère/triangle convexe en 2D, hexaèdre/tetraèdre convexe en 3D.
- Variables scalaires au centre des cellules du maillage primal : $(\rho_K)_{K\in\mathcal{M}}$, $(p_K)_{K\in\mathcal{M}}$, $(e_K)_{K\in\mathcal{M}}$.
- Vitesse aux interfaces : $(\boldsymbol{u}_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}}$.
- Maillage dual : $\mathcal{D} = (D_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}} = \{$ensemble des mailles duales$\}$.



Ranacher-Turek/Crouzeix-Raviart



MAC

Discrétisation temporelle

- **Correction de pression** (Schéma semi-implicite) :
  - Scaling du gradient de pression :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\rm int}, \quad (\overline{\boldsymbol{\nabla} p})_\sigma^{n+1} = \left(\frac{\rho^n_{D_\sigma}}{\rho^{n-1}_{D_\sigma}} \right)^{1/2} (\boldsymbol{\nabla} p^n)_\sigma .$$

  - Étape de prédiction : Résoudre $\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}$:

For $1 \leq i \leq d, \ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t} \left(\rho^n_{D_\sigma} \tilde{u}^{n+1}_{\sigma,i} - \rho^{n-1}_{D_\sigma} u^n_{\sigma,i} \right) + {\rm div}(\rho^n \tilde{u}^{n+1}_i \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\overline{\boldsymbol{\nabla} p})^{n+1}_{\sigma,i} + \mathcal{D}(\tilde{u}^{n+1}_i)_{\sigma,i} = 0.$$

  - Étape de correction : Résoudre $\boldsymbol{u}^{n+1}$, ρ^{n+1}, p^{n+1} et e^{n+1} :

For $1 \leq i \leq d, \ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}, \quad \frac{1}{\delta t} \rho^n_{D_\sigma} (u^{n+1}_{\sigma,i} - \tilde{u}^{n+1}_{\sigma,i}) + (\boldsymbol{\nabla} p^{n+1})_{\sigma,i} - (\overline{\boldsymbol{\nabla} p})^{n+1}_{\sigma,i} = 0,$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho^{n+1}_K - \rho^n_K) + {\rm div}(\rho^{n+1} \boldsymbol{u}^{n+1})_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho^{n+1}_K e^{n+1}_K - \rho^n_K e^n_K) + {\rm div}(\rho^{n+1} e^{n+1} \boldsymbol{u}^{n+1})_K + p^{n+1}_K \ {\rm div}(\boldsymbol{u}^{n+1})_K = S^{n+1}_K,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p^{n+1}_K = (\gamma - 1) \ \rho^{n+1} \ e^{n+1}_K .$$

Discrétisation temporelle

- **Schéma explicite** :

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\, \rho^{n+1}\, e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d, \ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\,\big(\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n\big) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

Utilisation d'une pression updatée dans la q.d.m. $\rightsquigarrow$ Nécessaire à la consistance.

Discrétisation temporelle

- **Schéma explicite** :

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n (\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ \big(\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n\big) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

Utilisation d'une pression updatée dans la q.d.m. $\rightsquigarrow$ Nécessaire à la consistance.

Discrétisation temporelle

- **Schéma explicite** :

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

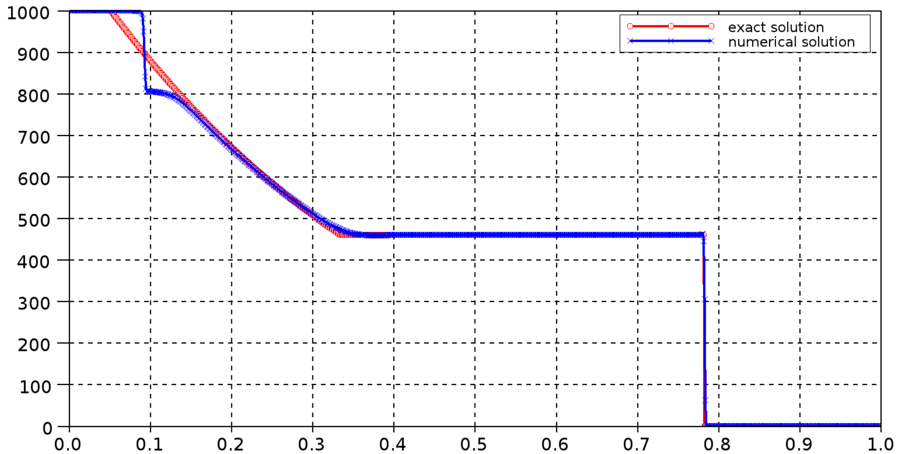
$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\, \rho^{n+1}\, e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d, \ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\left(\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n\right) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

Utilisation d'une pression updatée dans la q.d.m. $\rightsquigarrow$ Nécessaire à la consistance.



Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n (\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

Bilan de masse

- Flux convectifs :

$$|K|\ \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u})_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho \boldsymbol{u}), \quad F_{K,\sigma}(\rho \boldsymbol{u}) = |\sigma|\ \rho_\sigma\ u_{K,\sigma},$$

- Interpolation de la masse volumique MUSCL :

$$\exists\ \alpha_{K,\sigma} \in [0,1], \quad \rho_\sigma - \rho_K = \left| \begin{array}{ll} \alpha_{K,\sigma}(\rho_K - \rho_{M_\sigma^K}) & \text{si } u_{K,\sigma} \geq 0, \\ \alpha_{K,\sigma}(\rho_{M_\sigma^K} - \rho_K) & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

- ρ_σ est une combinaison convexe de (ρ_K, ρ_L) :

$$\exists \alpha_\sigma \in [0,1], \quad \rho_\sigma = \alpha_\sigma \rho_K + (1 - \alpha_\sigma)\rho_L.$$

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d, \ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

Bilan de masse

- Flux convectifs :

$$|K|\ \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u})_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho \boldsymbol{u}), \quad F_{K,\sigma}(\rho \boldsymbol{u}) = |\sigma|\ \rho_\sigma\ u_{K,\sigma},$$

- Interpolation de la masse volumique MUSCL :

$$\exists\ \alpha_{K,\sigma} \in [0,1], \quad \rho_\sigma - \rho_K = \left| \begin{array}{ll} \alpha_{K,\sigma}(\rho_K - \rho_{M_\sigma^K}) & \text{si } u_{K,\sigma} \geq 0, \\ \alpha_{K,\sigma}(\rho_{M_\sigma^K} - \rho_K) & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

- ρ_σ est une combinaison convexe de (ρ_K, ρ_L) :

$$\exists \alpha_\sigma \in [0,1], \quad \rho_\sigma = \alpha_\sigma \rho_K + (1 - \alpha_\sigma)\rho_L.$$

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

□ Bilan de masse

- Flux convectifs :

$$|K|\ \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u})_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho \boldsymbol{u}), \quad F_{K,\sigma}(\rho \boldsymbol{u}) = |\sigma|\ \rho_\sigma\ u_{K,\sigma},$$

- Interpolation de la masse volumique MUSCL :

$$\exists\ \alpha_{K,\sigma} \in [0,1], \quad \rho_\sigma - \rho_K = \left| \begin{array}{ll} \alpha_{K,\sigma}(\rho_K - \rho_{M_\sigma^K}) & \text{si } u_{K,\sigma} \geq 0, \\ \alpha_{K,\sigma}(\rho_{M_\sigma^K} - \rho_K) & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

- ρ_σ est une combinaison convexe de (ρ_K, ρ_L) :

$$\exists \alpha_\sigma \in [0,1], \quad \rho_\sigma = \alpha_\sigma \rho_K + (1 - \alpha_\sigma)\rho_L.$$

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n (\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

- **Bilan d'énergie interne**
  - Terme convectif :

$$\mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u})_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho \boldsymbol{u})\ e_\sigma,$$

  - Interpolation de e_σ imposée par celle de ρ_σ :

$$\rho_\sigma = \alpha_\sigma \rho_K + (1 - \alpha_\sigma)\rho_L,$$
$$\rho_\sigma e_\sigma = \alpha_\sigma \rho_K e_K + (1 - \alpha_\sigma)\rho_L e_L.$$

  - Opérateur divergence discret :

$$(\mathrm{div} \boldsymbol{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma|\ u_{K,\sigma}.$$

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \le i \le d$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

Bilan d'énergie interne

- Terme convectif :

$$\mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u})_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho \boldsymbol{u})\ e_\sigma,$$

- Interpolation de e_σ imposée par celle de ρ_σ :

$$\rho_\sigma = \alpha_\sigma \rho_K + (1 - \alpha_\sigma)\rho_L,$$
$$\rho_\sigma e_\sigma = \alpha_\sigma \rho_K e_K + (1 - \alpha_\sigma)\rho_L e_L.$$

- Opérateur divergence discret :

$$(\mathrm{div} \boldsymbol{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma|\ u_{K,\sigma}.$$

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n (\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

Bilan d'énergie interne

- Terme convectif :

$$\mathrm{div}(\rho e \boldsymbol{u})_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho \boldsymbol{u})\ e_\sigma,$$

- Interpolation de e_σ imposée par celle de ρ_σ :

$$\rho_\sigma = \alpha_\sigma \rho_K + (1 - \alpha_\sigma)\rho_L,$$
$$\rho_\sigma e_\sigma = \alpha_\sigma \rho_K e_K + (1 - \alpha_\sigma)\rho_L e_L.$$

- Opérateur divergence discret :

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma|\ u_{K,\sigma}.$$

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n (\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

- **Bilan de quantité de mouvement** :
  - Flux convectifs duaux :

$$\mathrm{div}(\rho \tilde{u}_i \boldsymbol{u})_\sigma = \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \boldsymbol{u})\ (u_i)_\epsilon.$$

  - Interpolation centrée de $(u_i)_\epsilon$.
  - Définition du gradient discret

$$(\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i} = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|}\ (p_L - p_K)\ \boldsymbol{n}_{K,\sigma} \cdot \boldsymbol{e}^{(i)},$$

pour obtenir une dualité grad-div :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K|\ p_K\ (\mathrm{div} \boldsymbol{u})_K + \sum_{i=1}^{d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}} |D_\sigma|\ u_{\sigma,i}\ (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i} = 0.$$

IRSN

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

- **Bilan de quantité de mouvement** :
  - Flux convectifs duaux :

$$\mathrm{div}(\rho \tilde{u}_i \boldsymbol{u})_\sigma = \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \boldsymbol{u})\ (u_i)_\epsilon.$$

  - Interpolation centrée de $(u_i)_\epsilon$.
  - Définition du gradient discret

$$(\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i} = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|}\ (p_L - p_K)\ \boldsymbol{n}_{K,\sigma} \cdot \boldsymbol{e}^{(i)},$$

    pour obtenir une dualité grad-div :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K|\ p_K\ (\mathrm{div}\boldsymbol{u})_K + \sum_{i=1}^{d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}} |D_\sigma|\ u_{\sigma,i}\ (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i} = 0.$$

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\, \rho^{n+1}\, e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d, \ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

- **Bilan de quantité de mouvement** :
  - Flux convectifs duaux :

$$\mathrm{div}(\rho \tilde{u}_i \boldsymbol{u})_\sigma = \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \boldsymbol{u})\ (u_i)_\epsilon.$$

  - Interpolation centrée de $(u_i)_\epsilon$.
  - Définition du gradient discret

$$(\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i} = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|}\ (p_L - p_K)\ \boldsymbol{n}_{K,\sigma} \cdot \boldsymbol{e}^{(i)},$$

  pour obtenir une dualité grad-div :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K|\ p_K\ (\mathrm{div}\boldsymbol{u})_K + \sum_{i=1}^{d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}} |D_\sigma|\ u_{\sigma,i}\ (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i} = 0.$$

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n (\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\, \rho_K^{n+1}\, e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

- **Bilan de quantité de mouvement** :
  - Opérateur de diffusion discret :

$$\mathcal{D}(u_i)_{\sigma,i} = \sum_{\epsilon = D_\sigma | D_{\sigma'} \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} \mu_\epsilon\ (u_{\sigma,i} - u_{\sigma',i}),$$

avec $\mu_\epsilon \sim \sigma\, h_\epsilon^{\zeta - 1}$.

  - Diffusion UPWIND : $\mu_\sigma = |F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \boldsymbol{u})|/2$.

Définition des opérateurs

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} e_K^{n+1} - \rho_K^n e_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n e^n \boldsymbol{u}^n)_K + p_K^n(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}^n))_K = S_K^n,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad p_K^{n+1} = (\gamma - 1)\ \rho_K^{n+1}\ e_K^{n+1}.$$

For $1 \leq i \leq d, \ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}$,

$$\frac{1}{\delta t}\ (\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0.$$

- **Bilan de quantité de mouvement** :
  - Opérateur de diffusion discret :

$$\mathcal{D}(u_i)_{\sigma,i} = \sum_{\epsilon = D_\sigma | D_{\sigma'} \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} \mu_\epsilon\ (u_{\sigma,i} - u_{\sigma',i}),$$

    avec $\mu_\epsilon \sim \sigma\, h_\epsilon^{\zeta - 1}$.

  - Diffusion UPWIND : $\mu_\sigma = |F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \boldsymbol{u})|/2$.

Calcul des masses volumiques et des flux duaux

Pour obtenir un bilan d'énergie cinétique on combine le bilan de masse et le bilan de q.d.m.

⚠ Les deux équations ne sont pas sur le même maillage.

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0, \qquad \text{Sur} K.$$

$$\frac{1}{\delta t}\left(\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n\right) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0, \qquad \text{Sur } D_\sigma.$$

On veut un bilan de masse sur le maillage dual

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^n = 0.$$

Calcul des masses volumiques et des flux duaux

Pour obtenir un bilan d'énergie cinétique on combine le bilan de masse et le bilan de q.d.m.

⚠ Les deux équations ne sont pas sur le même maillage.

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0, \qquad \text{Sur} K.$$

$$\frac{1}{\delta t}\left(\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n\right) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0, \qquad \text{Sur } D_\sigma.$$

On veut un bilan de masse sur le maillage dual

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^n = 0.$$

Calcul des masses volumiques et des flux duaux

Pour obtenir un bilan d'énergie cinétique on combine le bilan de masse et le bilan de q.d.m.

⚠ Les deux équations ne sont pas sur le même maillage.

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n)_K = 0, \qquad \text{Sur}K.$$

$$\frac{1}{\delta t}\left(\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_{\sigma,i}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_{\sigma,i}^n\right) + \mathrm{div}(\rho^n u_i^n \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1} + \mathcal{D}(u_i^n)_{\sigma,i} = 0, \qquad \text{Sur } D_\sigma.$$

On veut un bilan de masse sur le maillage dual

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^n = 0.$$

Calcul des masses volumiques et des flux duaux

On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma} - \rho^\star_{D_\sigma}) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho^\star_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho^\star_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$

Calcul des masses volumiques et des flux duaux

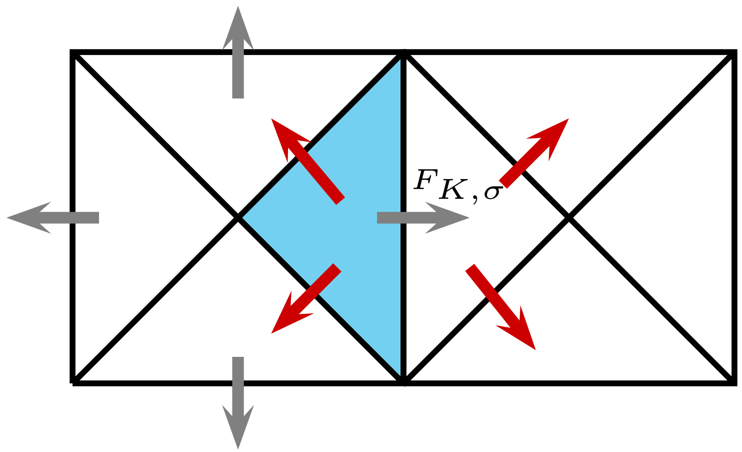
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma} - \rho^\star_{D_\sigma}) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho^\star_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho^\star_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit $\boldsymbol{w}$ tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{w} = cste$ et pour toute face σ de K :

$$\int_\sigma \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \qquad \text{(}\textit{relèvement des flux}\text{).}$$

On définit alors : $\quad F_{\sigma,\epsilon} = \displaystyle\int_\epsilon \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$.

Calcul des masses volumiques et des flux duaux

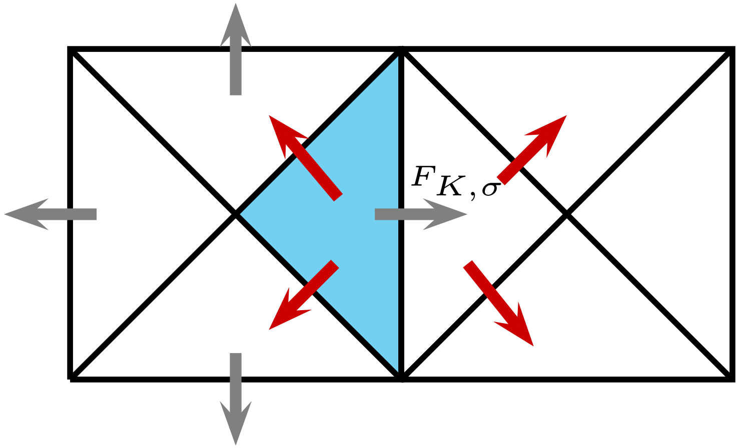
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma} - \rho^\star_{D_\sigma}) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho^\star_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho^\star_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit $\boldsymbol{w}$ tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{w} = cste$ et pour toute face σ de K :

$$\int_\sigma \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \qquad \text{(}\textit{relèvement des flux}\text{).}$$

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_\epsilon \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$.

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\partial D_{K,\sigma}} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} = \int_{D_{K,\sigma}} \mathrm{div}\boldsymbol{w} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_K \mathrm{div}\boldsymbol{w}$$

$$= \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_{\partial K} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = -\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho^\star_K)$$

Calcul des masses volumiques et des flux duaux

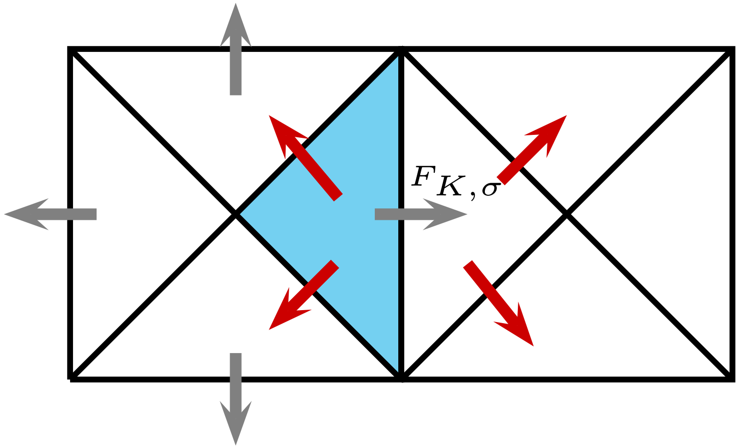
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma} - \rho^\star_{D_\sigma}) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho^\star_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho^\star_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit $\boldsymbol{w}$ tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{w} = cste$ et pour toute face σ de K :

$$\int_\sigma \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \qquad (\textit{relèvement des flux}).$$

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_\epsilon \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$.

$$\frac{|D_{K,\sigma}|}{\delta t}(\rho_K - \rho^\star_K) + F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = 0, \qquad \frac{|D_{L,\sigma}|}{\delta t}(\rho_L - \rho^\star_L) + F_{L,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset L}} F_{\sigma,\epsilon} = 0,$$

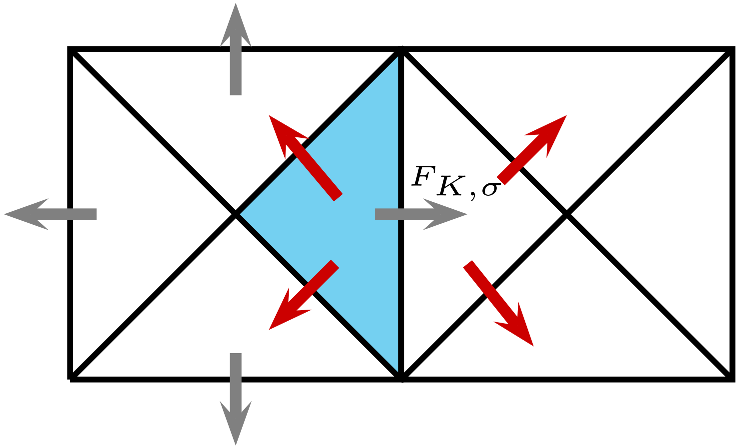
Calcul des masses volumiques et des flux duaux

On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma} - \rho^\star_{D_\sigma}) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho^\star_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$
$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho^\star_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit $\boldsymbol{w}$ tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{w} = cste$ et pour toute face σ de K :

$$\int_\sigma \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \qquad (\textit{relèvement des flux}).$$

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_\epsilon \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$.

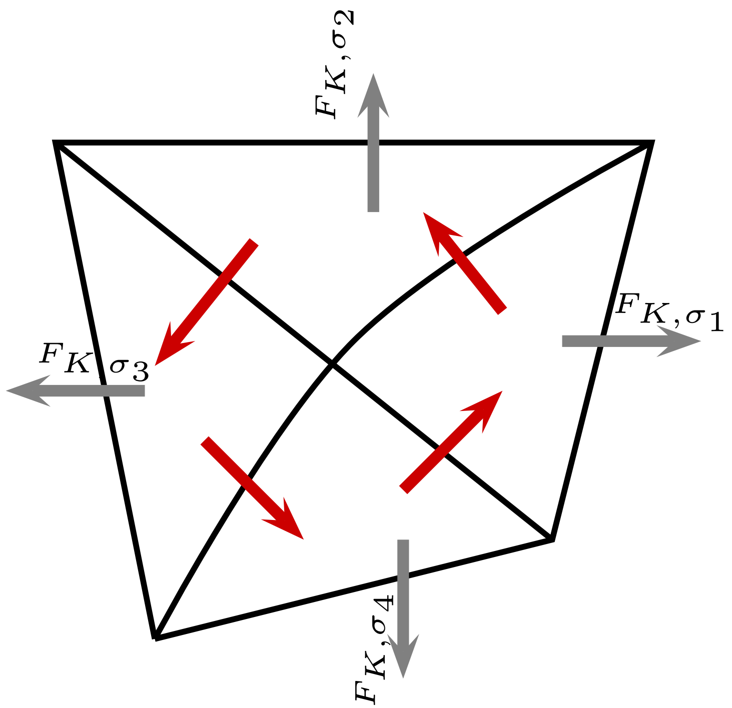
$$\frac{|D_{K,\sigma}|}{\delta t}(\rho_K - \rho^\star_K) + F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)\\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = 0, \qquad \frac{|D_{L,\sigma}|}{\delta t}(\rho_L - \rho^\star_L) + F_{L,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)\\ \epsilon \subset L}} F_{\sigma,\epsilon} = 0,$$

$$\frac{1}{\delta t}\Big(\underbrace{|D_{K,\sigma}|\rho_K + |D_{L,\sigma}|\rho_L}_{|D_\sigma|\rho_{D_\sigma}} - |D_{K,\sigma}|\rho^\star_K - |D_{L,\sigma}|\rho^\star_L\Big) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

Calcul des masses volumiques et des flux duaux

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma},$$

avec $\xi_K^\sigma = \dfrac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}$, indépendant de K et σ.



On résout le système linéaire :

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \xi_K^\sigma \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}, \; \forall \sigma \in \mathcal{E}(K).$$

Équation d'énergie cinétique

- Equations d'énergie cinétiques discrètes :
  - Explicite

$$\frac{1}{2}\frac{|D_\sigma|}{\delta t}\Big[\rho_{D_\sigma}^{n+1}(u_{\sigma,i}^{n+1})^2-\rho_{D_\sigma}^{n}(u_{\sigma,i}^{n})^2\Big]+\frac{1}{2}\sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}F_{\sigma,\epsilon}^{n}\,(u_{\epsilon,i}^{n})^2 + |D_\sigma|\,(\boldsymbol{\nabla}p)_{\sigma,i}^{n+1}\;u_{\sigma,i}^{n+1}=-R_{\sigma,i}^{n+1},$$

  - Correction de pression

$$\frac{1}{2}\frac{|D_\sigma|}{\delta t}\Big[\rho_{D_\sigma}^{n}(u_{\sigma,i}^{n+1})^2-\rho_{D_\sigma}^{n-1}(u_{\sigma,i}^{n})^2\Big]+\frac{1}{2}\sum_{\epsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}}F_{\sigma,\epsilon}^{n}\;\tilde{u}_{\sigma,i}^{n+1}\;\tilde{u}_{\sigma',i}^{n+1} + |D_\sigma|\,(\boldsymbol{\nabla}p)_{\sigma,i}^{n+1}\;u_{\sigma,i}^{n+1}=-R_{\sigma,i}^{n+1}-P_{\sigma,i}^{n+1},$$

- Des résidus à compenser dans l'équation d'énergie interne via S_K.

$$S_K^{n+1}\geq 0\qquad\text{and}\qquad\sum_{K\in\mathcal{M}}S_K^{n+1}-\sum_{i=1}^{d}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_S^{(i)}}R_{\sigma,i}^{n+1}=0.$$

Équation d'énergie cinétique

- Equations d'énergie cinétiques discrètes :
  - Explicite

$$\frac{1}{2}\frac{|D_\sigma|}{\delta t}\Big[\rho_{D_\sigma}^{n+1}(u_{\sigma,i}^{n+1})^2-\rho_{D_\sigma}^{n}(u_{\sigma,i}^{n})^2\Big]+\frac{1}{2}\sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}F_{\sigma,\epsilon}^{n}\,(u_{\epsilon,i}^{n})^2 + |D_\sigma|\,(\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1}\,u_{\sigma,i}^{n+1}=-R_{\sigma,i}^{n+1},$$

  - Correction de pression

$$\frac{1}{2}\frac{|D_\sigma|}{\delta t}\Big[\rho_{D_\sigma}^{n}(u_{\sigma,i}^{n+1})^2-\rho_{D_\sigma}^{n-1}(u_{\sigma,i}^{n})^2\Big]+\frac{1}{2}\sum_{\epsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}}F_{\sigma,\epsilon}^{n}\,\tilde{u}_{\sigma,i}^{n+1}\,\tilde{u}_{\sigma',i}^{n+1} + |D_\sigma|\,(\boldsymbol{\nabla} p)_{\sigma,i}^{n+1}\,u_{\sigma,i}^{n+1}=-R_{\sigma,i}^{n+1}-P_{\sigma,i}^{n+1},$$

- Des résidus à compenser dans l'équation d'énergie interne via S_K.

$$S_K^{n+1}\geq 0 \qquad \text{and} \qquad \sum_{K\in\mathcal{M}} S_K^{n+1}-\sum_{i=1}^{d}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}} R_{\sigma,i}^{n+1}=0.$$

Sommaire

Positivité de ρ et e

Lemme

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(\rho_K^n,\ \boldsymbol{u}_K^n,\ e_K^n)_{K\in\mathcal{M}} \in (\mathbb{R}^{\mathrm{card}\mathcal{M}} \times (\mathbb{R}^{\mathrm{card}\mathcal{E}})^d \times \mathbb{R}^{\mathrm{card}\mathcal{M}})$. Supposons que e_K^n et ρ_K^n sont positifs pour tout $K \in \mathcal{M}$. Soient $(\rho_K^n,\ \boldsymbol{u}_K^n,\ e_K^n)_{K\in\mathcal{M}}$ solutions du schéma (explicite ou implicite) satisfaisant la condition de C.F.L suivante

$$\delta t \leq \min\Bigg(\frac{|K|}{\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| \ \Big(1+\alpha_{K,\sigma}^n\Big)\ (u_{K,\sigma}^n)^+}, \\ \frac{|K|\ \rho_K^n}{\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| \left\{ \Big(1+\beta_{K,\sigma}^n\Big)\, |F_{K,\sigma}^n| + (\gamma-1)\, \rho_K^n u_{K,\sigma}^n \right\}}, \ \frac{\rho_K^{n+1} |D_{K,\sigma}|}{\displaystyle\sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma),\ \epsilon\cap\bar{K}\neq\emptyset} \alpha_{K,\epsilon}\ (F_{\sigma,\epsilon}^n)^-} \Bigg).$$

alors $e_K^{n+1} \geq 0$ et $\rho_K^{n+1} \geq 0$, pour tout $K \in \mathcal{M}$.

Idée de preuve

Structures en M-matrice pour le schéma correction de pression. La première condition de CFL nécessaire pour la positivité de ρ, la seconde pour le terme source S_K la troisième pour e.

Positivité de ρ et e

Lemme

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(\rho_K^n,\ \boldsymbol{u}_K^n,\ e_K^n)_{K\in\mathcal{M}} \in (\mathbb{R}^{\mathrm{card}\mathcal{M}} \times (\mathbb{R}^{\mathrm{card}\mathcal{E}})^d \times \mathbb{R}^{\mathrm{card}\mathcal{M}})$. Supposons que e_K^n et ρ_K^n sont positifs pour tout $K \in \mathcal{M}$. Soient $(\rho_K^n,\ \boldsymbol{u}_K^n,\ e_K^n)_{K\in\mathcal{M}}$ solutions du schéma (explicite ou implicite) satisfaisant la condition de C.F.L suivante

$$\delta t \leq \min\Bigg(\frac{|K|}{\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| \ \left(1+\alpha_{K,\sigma}^n\right) (u_{K,\sigma}^n)^+},$$

$$\frac{|K|\ \rho_K^n}{\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| \left\{ \left(1+\beta_{K,\sigma}^n\right) |F_{K,\sigma}^n| + (\gamma-1)\,\rho_K^n u_{K,\sigma}^n \right\}},\ \frac{\rho_K^{n+1} |D_{K,\sigma}|}{\displaystyle\sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma),\ \epsilon\cap\bar{K}\neq\emptyset} \alpha_{K,\epsilon}\ (F_{\sigma,\epsilon}^n)^-} \Bigg).$$

alors $e_K^{n+1} \geq 0$ et $\rho_K^{n+1} \geq 0$, pour tout $K \in \mathcal{M}$.

Idée de preuve

Structures en M-matrice pour le schéma correction de pression. La première condition de CFL nécessaire pour la positivité de ρ, la seconde pour le terme source S_K la troisième pour e.

Existence et stabilité de la solution

Lemme

On suppose que pour $K \in \mathcal{M}$, $e_K^0 > 0$, $\rho_K^0 > 0$ et $\rho_K^{-1} > 0$. Alors il existe une solution pour chaque schéma satisfaisant, $\forall n \in \mathbb{N}$ and $\forall K \in \mathcal{M}$:

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K|\, \rho_K^n\, e_K^n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}} |D_\sigma|\, \rho_{D_\sigma}^{n-1}\, (u_{\sigma,i}^n)^2 + \mathcal{R}^n \leq$$

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K|\, \rho_K^0\, e_K^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}} |D_\sigma|\, \rho_{D_\sigma}^{-1}\, (u_{\sigma,i}^0)^2 + \mathcal{R}^0,$$

où :

$$\mathcal{R}^n = \delta t^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\rm int}} \frac{|D_\sigma|}{\rho_{D_\sigma}^{n-1}}\, |(\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma^n|^2 = \delta t^2 \sum_{\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|\, \rho_{D_\sigma}^{n-1}}\, (p_K^n - p_L^n)^2.$$

pour le schéma à correction de pression, et

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K|\, \rho_K^{n+1}\, e_K^{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}} |D_\sigma|\, \rho_{D_\sigma}^{n}\, (u_{\sigma,i}^n)^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K|\, \rho_K^1\, e_K^1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{(i)}} |D_\sigma|\, \rho_{D_\sigma}^{0}\, (u_{\sigma,i}^0)^2$$

pour le schéma explicite.

Inégalité d'entropie discrète

Lemme

On pose $\rho_K^n S_K^n = \phi(\rho_K^n) - \rho_K^n \psi(e_K^n)$, avec $\phi(\rho) = \rho \log(\rho)$, $\psi(e) = \dfrac{1}{1-\gamma} \log(e)$. Alors la propriété suivante est vérifiée pour tout $K \in \mathcal{M}$

- Correction de pression

$$\frac{|K|}{\delta t} \left(\rho_K^{n+1} S_K^{n+1} - \rho_K^n S_K^n \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^{n+1} S_\sigma^{n+1} \leq 0,$$

- Explicite

$$\frac{|K|}{\delta t} \left(\rho_K^{n+1} S_K^{n+1} - \rho_K^n S_K^n \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^{n} S_\sigma^{n} + R_K^n \leq 0,$$

avec $S_\sigma = \beta_\sigma S_K + (1-\beta_\sigma) S_L$, $\beta_\sigma = \alpha_\sigma \dfrac{\rho_K}{\rho_\sigma} \in [0,1]$

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan de masse
  - On multiplie le bilan de masse par $\phi'(\rho_K)$ avec ϕ convexe.

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \bar{\rho}_K)\phi'(\rho_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma|(\rho_\sigma - \rho_K)\phi'(\rho_K) u_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \rho_K \phi'(\rho_K) u_{K,\sigma} = 0.$$

  - On utilise la propriété MUSCL

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma|(\rho_\sigma - \rho_K) u_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \alpha_{K,\sigma} |u_{K,\sigma}| (\rho_K - \rho_{M_\sigma^K}).$$

  - On exploite la convexité

$$(\rho_K - \bar{\rho}_K)\phi'(\rho_K) \geq \phi(\rho_K) - \phi(\bar{\rho}_K) \quad \text{et} \quad (\rho_K - \rho_{M_\sigma^K})\phi'(\rho_K) \geq \phi(\rho_K) - \phi(\rho_{M_\sigma^K})$$

  - On combine les relations pour obtenir

$$\frac{|K|}{\delta t}(\phi(\rho_K) - \phi(\bar{\rho}_K)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \left[\phi(\rho)\right]_\sigma u_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma} \left(\rho_K \phi'(\rho_K) - \phi(\rho_K)\right) \leq 0,$$

$$\left[\phi(\rho)\right]_\sigma = \alpha_\sigma \phi(\rho_K) + (1 - \alpha_\sigma)\phi(\rho_L)$$

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan de masse
  - On multiplie le bilan de masse par $\phi'(\rho_K)$ avec ϕ convexe.

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \bar\rho_K)\phi'(\rho_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|(\rho_\sigma - \rho_K)\phi'(\rho_K)u_{K,\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\rho_K\phi'(\rho_K)u_{K,\sigma} = 0.$$

  - On utilise la propriété MUSCL

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|(\rho_\sigma - \rho_K)u_{K,\sigma} = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\alpha_{K,\sigma}|u_{K,\sigma}|(\rho_K - \rho_{M_\sigma^K}).$$

  - On exploite la convexité

$$(\rho_K - \bar\rho_K)\phi'(\rho_K) \geq \phi(\rho_K) - \phi(\bar\rho_K) \quad \text{et} \quad (\rho_K - \rho_{M_\sigma^K})\phi'(\rho_K) \geq \phi(\rho_K) - \phi(\rho_{M_\sigma^K})$$

  - On combine les relations pour obtenir

$$\frac{|K|}{\delta t}(\phi(\rho_K) - \phi(\bar\rho_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\,[\phi(\rho)]_\sigma\, u_{K,\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\left(\rho_K\phi'(\rho_K) - \phi(\rho_K)\right) \leq 0,$$

$$[\phi(\rho)]_\sigma = \alpha_\sigma\phi(\rho_K) + (1-\alpha_\sigma)\phi(\rho_L)$$

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan de masse
  - On multiplie le bilan de masse par $\phi'(\rho_K)$ avec ϕ convexe.

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \bar{\rho}_K)\phi'(\rho_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|(\rho_\sigma - \rho_K)\phi'(\rho_K)u_{K,\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\rho_K\phi'(\rho_K)u_{K,\sigma} = 0.$$

  - On utilise la propriété MUSCL

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|(\rho_\sigma - \rho_K)u_{K,\sigma} = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\alpha_{K,\sigma}|u_{K,\sigma}|(\rho_K - \rho_{M_\sigma^K}).$$

  - On exploite la convexité

$$(\rho_K - \bar{\rho}_K)\phi'(\rho_K) \geq \phi(\rho_K) - \phi(\bar{\rho}_K) \quad \text{et} \quad (\rho_K - \rho_{M_\sigma^K})\phi'(\rho_K) \geq \phi(\rho_K) - \phi(\rho_{M_\sigma^K})$$

  - On combine les relations pour obtenir

$$\frac{|K|}{\delta t}(\phi(\rho_K) - \phi(\bar{\rho}_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\left[\phi(\rho)\right]_\sigma u_{K,\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|u_{K,\sigma}\left(\rho_K\phi'(\rho_K) - \phi(\rho_K)\right) \leq 0,$$

$$\left[\phi(\rho)\right]_\sigma = \alpha_\sigma\phi(\rho_K) + (1-\alpha_\sigma)\phi(\rho_L)$$

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan de masse
  - On multiplie le bilan de masse par $\phi'(\rho_K)$ avec ϕ convexe.

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \bar{\rho}_K)\phi'(\rho_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma|(\rho_\sigma - \rho_K)\phi'(\rho_K)u_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma|\rho_K\phi'(\rho_K)u_{K,\sigma} = 0.$$

  - On utilise la propriété MUSCL

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma|(\rho_\sigma - \rho_K)u_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma|\alpha_{K,\sigma}|u_{K,\sigma}|(\rho_K - \rho_{M_\sigma^K}).$$

  - On exploite la convexité

$$(\rho_K - \bar{\rho}_K)\phi'(\rho_K) \geq \phi(\rho_K) - \phi(\bar{\rho}_K) \quad \text{et} \quad (\rho_K - \rho_{M_\sigma^K})\phi'(\rho_K) \geq \phi(\rho_K) - \phi(\rho_{M_\sigma^K})$$

  - On combine les relations pour obtenir

$$\frac{|K|}{\delta t}(\phi(\rho_K) - \phi(\bar{\rho}_K)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \left[\phi(\rho)\right]_\sigma u_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma} \left(\rho_K\phi'(\rho_K) - \phi(\rho_K)\right) \leq 0,$$

$$\left[\phi(\rho)\right]_\sigma = \alpha_\sigma\phi(\rho_K) + (1 - \alpha_\sigma)\phi(\rho_L)$$

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan d'énergie interne
  - On multiplie le bilan d'énergie interne par $\psi'(e_K)$ avec ψ convexe décroissante et on utilise la propriété MUSCL.

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K e_K - \bar\rho_K \bar e_K)\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \beta_{K,\sigma}|F_{K,\sigma}|(e_K - e_{M_\sigma^K})\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\, e_K \psi'(e_K)$$
$$+ p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) = S_K \psi'(e_K) \le 0.$$

  - On utilise le bilan de masse

$$\frac{|K|}{\delta t}\bar\rho_K(e_K - \bar e_K)\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \beta_{K,\sigma}|F_{K,\sigma}|(e_K - e_{M_\sigma^K})\psi'(e_K) + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \le 0$$

  - Par convexité de ψ

$$\frac{|K|}{\delta t}\bar\rho_K(\psi(e_K) - \psi(\bar e_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}([\psi(e)]_\sigma - \psi(e_K)) + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \le 0.$$

  - On utilise de nouveau le bilan de masse

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K\psi(e_K) - \bar\rho_K\psi(\bar e_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\,[\psi(e)]_\sigma + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \le 0,$$

$$[\psi(e)]_\sigma = \beta_\sigma\psi(e_K) + (1-\beta_\sigma)\psi(e_L).$$

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan d'énergie interne
  - On multiplie le bilan d'énergie interne par $\psi'(e_K)$ avec ψ convexe décroissante et on utilise la propriété MUSCL.

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K e_K - \bar\rho_K \bar e_K)\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \beta_{K,\sigma}|F_{K,\sigma}|(e_K - e_{M_\sigma^K})\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\, e_K \psi'(e_K)$$
$$+ p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) = S_K \psi'(e_K) \le 0.$$

  - On utilise le bilan de masse

$$\frac{|K|}{\delta t}\bar\rho_K(e_K - \bar e_K)\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \beta_{K,\sigma}|F_{K,\sigma}|(e_K - e_{M_\sigma^K})\psi'(e_K) + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \le 0$$

  - Par convexité de ψ

$$\frac{|K|}{\delta t}\bar\rho_K(\psi(e_K) - \psi(\bar e_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}([\psi(e)]_\sigma - \psi(e_K)) + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \le 0.$$

  - On utilise de nouveau le bilan de masse

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K\psi(e_K) - \bar\rho_K\psi(\bar e_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\,[\psi(e)]_\sigma + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \le 0,$$

$$[\psi(e)]_\sigma = \beta_\sigma \psi(e_K) + (1-\beta_\sigma)\psi(e_L).$$

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan d'énergie interne
  - On multiplie le bilan d'énergie interne par $\psi'(e_K)$ avec ψ convexe décroissante et on utilise la propriété MUSCL.

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K e_K - \bar\rho_K \bar e_K)\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \beta_{K,\sigma}|F_{K,\sigma}|(e_K - e_{M_\sigma^K})\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\, e_K\, \psi'(e_K)$$
$$+\, p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) = S_K\psi'(e_K) \le 0.$$

  - On utilise le bilan de masse

$$\frac{|K|}{\delta t}\bar\rho_K(e_K - \bar e_K)\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \beta_{K,\sigma}|F_{K,\sigma}|(e_K - e_{M_\sigma^K})\psi'(e_K) + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \le 0$$

  - Par convexité de ψ

$$\frac{|K|}{\delta t}\bar\rho_K(\psi(e_K) - \psi(\bar e_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}([\psi(e)]_\sigma - \psi(e_K)) + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \le 0.$$

  - On utilise de nouveau le bilan de masse

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K\psi(e_K) - \bar\rho_K\psi(\bar e_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\,[\psi(e)]_\sigma + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \le 0,$$

$$[\psi(e)]_\sigma = \beta_\sigma\psi(e_K) + (1-\beta_\sigma)\psi(e_L).$$

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan d'énergie interne
  - On multiplie le bilan d'énergie interne par $\psi'(e_K)$ avec ψ convexe décroissante et on utilise la propriété MUSCL.

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K e_K - \bar\rho_K \bar e_K)\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \beta_{K,\sigma}|F_{K,\sigma}|(e_K - e_{M_\sigma^K})\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\, e_K \psi'(e_K)$$
$$+\, p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) = S_K\psi'(e_K) \leq 0.$$

  - On utilise le bilan de masse

$$\frac{|K|}{\delta t}\bar\rho_K(e_K - \bar e_K)\psi'(e_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \beta_{K,\sigma}|F_{K,\sigma}|(e_K - e_{M_\sigma^K})\psi'(e_K) + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \leq 0$$

  - Par convexité de ψ

$$\frac{|K|}{\delta t}\bar\rho_K(\psi(e_K) - \psi(\bar e_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}([\psi(e)]_\sigma - \psi(e_K)) + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \leq 0.$$

  - On utilise de nouveau le bilan de masse

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K\psi(e_K) - \bar\rho_K\psi(\bar e_K)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\,[\psi(e)]_\sigma + p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K) \leq 0,$$

$$[\psi(e)]_\sigma = \beta_\sigma\psi(e_K) + (1-\beta_\sigma)\psi(e_L).$$

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan d'entropie
  - On somme les deux inégalités avec $\phi(x) = x\log(x)$ et $\psi(x) = \dfrac{1}{1-\gamma}\log(x)$
  - Les termes $p_K \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma} \psi'(e_K)$ et $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma} \left(\rho_K \phi'(\rho_K) - \phi(\rho_K)\right)$ se compensent exactement.
  - On obtient bien

$$\frac{|K|}{\delta t}\left(\rho_K S_K - \bar{\rho}_K \bar{S}_K\right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} S_\sigma \leq 0,$$

La discrétisation explicite rajoute des termes résiduels qui n'ont pas un signe forcément positifs. Néanmoins, les parties négatives disparaîssent à la limite.

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan d'entropie
  - On somme les deux inégalités avec $\phi(x) = x\log(x)$ et $\psi(x) = \dfrac{1}{1-\gamma}\log(x)$
  - Les termes $p_K \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma} \psi'(e_K)$ et $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma} \big(\rho_K \phi'(\rho_K) - \phi(\rho_K)\big)$ se compensent exactement.
  - On obtient bien

$$\frac{|K|}{\delta t}\left(\rho_K S_K - \bar{\rho}_K \bar{S}_K\right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} S_\sigma \leq 0,$$

La discrétisation explicite rajoute des termes résiduels qui n'ont pas un signe forcément positifs. Néanmoins, les parties négatives disparaîssent à la limite.

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan d'entropie
  - On somme les deux inégalités avec $\phi(x) = x\log(x)$ et $\psi(x) = \dfrac{1}{1-\gamma}\log(x)$
  - Les termes $p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\psi'(e_K)$ et $\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}\left(\rho_K\phi'(\rho_K) - \phi(\rho_K)\right)$ se compensent exactement.
  - On obtient bien

$$\frac{|K|}{\delta t}\left(\rho_K S_K - \bar{\rho}_K \bar{S}_K\right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} S_\sigma \leq 0,$$

La discrétisation explicite rajoute des termes résiduels qui n'ont pas un signe forcément positifs. Néanmoins, les parties négatives disparaîssent à la limite.

Inégalité d'entropie discrète

Élements de preuve (Cas implicite)

- Bilan d'entropie
  - On somme les deux inégalités avec $\phi(x) = x\log(x)$ et $\psi(x) = \dfrac{1}{1-\gamma}\log(x)$
  - Les termes $p_K \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma} \psi'(e_K)$ et $\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma} \left(\rho_K \phi'(\rho_K) - \phi(\rho_K)\right)$ se compensent exactement.
  - On obtient bien

$$\frac{|K|}{\delta t}\left(\rho_K S_K - \bar{\rho}_K \bar{S}_K\right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} S_\sigma \leq 0,$$

La discrétisation explicite rajoute des termes résiduels qui n'ont pas un signe forcément positifs. Néanmoins, les parties négatives disparaîssent à la limite.

Sommaire

Consistance du schéma

- **Formulation faible du problème** : Pour tout $\varphi \in C_c^\infty\big(\Omega \times [0,T)\big)$:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \Big[\rho\, \partial_t \varphi + \rho\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi\Big] - \int_\Omega \rho_0\, \varphi(.,0) = 0,\\
&-\int_0^T \int_\Omega \rho\, \boldsymbol{u} \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} + \rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} : \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi} + p \mathrm{div} \boldsymbol{\varphi} - \int_\Omega \rho_0 \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(.,0) = 0,\\
&-\int_{\Omega \times (0,T)} \Big[\rho\, E\, \partial_t \varphi + (\rho\, E + p)\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi\Big] - \int_\Omega \rho_0(x)\, E_0(x)\, \varphi(x,0) = 0,\\
&p = (\gamma - 1) \rho\, e, \quad E = \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}|^2 + e, \quad E_0 = \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}_0|^2 + e_0.
\end{aligned}
$$

- On complète avec une inégalité d'entropie

$$
-\int_0^T \int_\Omega \rho S \partial_t \varphi + \rho S\, \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi - \int_\Omega S_0 \varphi(.,0) \leq 0, \qquad S = \log \rho - \frac{1}{\gamma - 1} \log e
$$

IRSN

Consistance du schéma

- **Formulation faible du problème** : Pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty\big(\Omega \times [0,\, T)\big)$:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \Big[\rho\, \partial_t \varphi + \rho\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi\Big] - \int_\Omega \rho_0\, \varphi(.,0) = 0,\\
&-\int_0^T \int_\Omega \rho\, \boldsymbol{u} \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} + \rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} : \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi} + p \mathrm{div} \boldsymbol{\varphi} - \int_\Omega \rho_0 \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(.,0) = 0,\\
&-\int_{\Omega \times (0,T)} \Big[\rho\, E\, \partial_t \varphi + (\rho\, E + p)\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi\Big] - \int_\Omega \rho_0(x)\, E_0(x)\, \varphi(x,0) = 0,\\
&p = (\gamma - 1)\rho\, e, \quad E = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + e, \quad E_0 = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 + e_0.
\end{aligned}
$$

- On complète avec une inégalité d'entropie

$$
-\int_0^T \int_\Omega \rho S \partial_t \varphi + \rho S\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi - \int_\Omega S_0 \varphi(.,0) \leq 0, \qquad S = \log \rho - \frac{1}{\gamma - 1} \log e
$$

Consistance du schéma

Soit $\left(\mathcal{M}^{(m)}, D^{(m)}, \delta t^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de discrétisations à mailles décalées telles que $h^{(m)} \to 0$ et $\delta t^{(m)} \to 0$ lorsque $m \to \infty$.

Soit :

$$\rho^{(m)}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} \rho_K^n\, \mathcal{X}_K(\boldsymbol{x})\, \mathcal{X}_{(n,n+1]}(t),$$

$$p^{(m)}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} p_K^n\, \mathcal{X}_K(\boldsymbol{x})\, \mathcal{X}_{(n,n+1]}(t),$$

$$e^{(m)}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} e_K^n\, \mathcal{X}_K(\boldsymbol{x})\, \mathcal{X}_{(n,n+1]}(t),$$

$$\boldsymbol{u}^{(m)}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=0}^{N^{(m)}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \boldsymbol{u}_\sigma^n \mathcal{X}_{D_\sigma} \mathcal{X}_{(t^n,t^{n+1})}.$$

Théorème (Consistance de Lax)

Sous certaines hypothèses de régularité sur le maillage ainsi que sur le contrôle des normes des solutions discrètes, toute suite convergente de solutions $(\rho^{(m)}, p^{(m)}, e^{(m)}, \boldsymbol{u}^{(m)})$ converge nécessairement vers la solution du problème faible $(\bar\rho, \bar p, \bar e, \bar{\boldsymbol{u}})$. De plus sous des hypothèses supplémentaires la solution du schéma vérifie l'inégalité d'entropie à la limite.

Consistance du schéma

Soit $\left(\mathcal{M}^{(m)}, D^{(m)}, \delta t^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de discrétisations à mailles décalées telles que $h^{(m)} \to 0$ et $\delta t^{(m)} \to 0$ lorsque $m \to \infty$.

Soit :
$$\rho^{(m)}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} \rho_K^n \, \mathcal{X}_K(\boldsymbol{x}) \, \mathcal{X}_{(n,n+1]}(t),$$

$$p^{(m)}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} p_K^n \, \mathcal{X}_K(\boldsymbol{x}) \, \mathcal{X}_{(n,n+1]}(t),$$

$$e^{(m)}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} e_K^n \, \mathcal{X}_K(\boldsymbol{x}) \, \mathcal{X}_{(n,n+1]}(t),$$

$$\boldsymbol{u}^{(m)}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n=0}^{N^{(m)}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \boldsymbol{u}_\sigma^n \mathcal{X}_{D_\sigma} \mathcal{X}_{(t^n, t^{n+1})}.$$

Théorème (Consistance de Lax)

Sous certaines hypothèses de régularité sur le maillage ainsi que sur le contrôle des normes des solutions discrètes, toute suite convergente de solutions $(\rho^{(m)}, p^{(m)}, e^{(m)}, \boldsymbol{u}^{(m)})$ converge nécessairement vers la solution du problème faible $(\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{e}, \bar{\boldsymbol{u}})$. De plus sous des hypothèses supplémentaires la solution du schéma vérifie l'inégalité d'entropie à la limite.

Étapes importantes de la preuve :

- On multiplie les équations par les interpolées des fonctions test et on somme sur les éléments du maillage :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} |K|(\rho_K^{n+1}-\rho_K^n)\,\varphi_K^{n+1} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^n\,\varphi_K^{n+1} = 0.$$

- On transporte les dérivations sur les fonctions test par IPP discrètes :

$$-\int_0^T \int_\Omega \rho^{(m)} \eth_t \varphi_{\mathcal{M}} - \int_0^T \int_\Omega \rho^{(m)} \boldsymbol{u}^{(m)}.\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{E}} \varphi_{\mathcal{M}} - \int_\Omega (\rho^{(m)})^0(x)\,\varphi_{\mathcal{M}}(x,0) + R^{(m)} = 0.$$

- On utilise les hypothèses de contrôle des normes pour faire tendre $R^{(m)}$ vers 0.

Étapes importantes de la preuve :

- On multiplie les équations par les interpolées des fonctions test et on somme sur les éléments du maillage :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n)\, \varphi_K^{n+1} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^n\, \varphi_K^{n+1} = 0.$$

- On transporte les dérivations sur les fonctions test par IPP discrètes :

$$- \int_0^T \int_\Omega \rho^{(m)} \eth_t \varphi_{\mathcal{M}} - \int_0^T \int_\Omega \rho^{(m)} \boldsymbol{u}^{(m)} . \boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{E}} \varphi_{\mathcal{M}} - \int_\Omega (\rho^{(m)})^0(x)\ \varphi_{\mathcal{M}}(x,0) + R^{(m)} = 0.$$

- On utilise les hypothèses de contrôle des normes pour faire tendre $R^{(m)}$ vers 0.

Étapes importantes de la preuve :

- On multiplie les équations par les interpolées des fonctions test et on somme sur les éléments du maillage :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} |K|(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n)\,\varphi_K^{n+1} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^n\,\varphi_K^{n+1} = 0.$$

- On transporte les dérivations sur les fonctions test par IPP discrètes :

$$-\int_0^T \int_\Omega \rho^{(m)} \eth_t \varphi_{\mathcal{M}} - \int_0^T \int_\Omega \rho^{(m)} \boldsymbol{u}^{(m)}.\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{E}}\varphi_{\mathcal{M}} - \int_\Omega (\rho^{(m)})^0(x)\ \varphi_{\mathcal{M}}(x,0) + R^{(m)} = 0.$$

- On utilise les hypothèses de contrôle des normes pour faire tendre $R^{(m)}$ vers 0.

Étapes importantes de la preuve :

Pour l'équation d'énergie cinétique et la q.d.m., on doit traiter les flux duaux $F_{\sigma,\epsilon}$. On utilise alors un lemme liant les termes de convection des deux maillages

$$\Big|\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K\in\mathcal{M}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F^n_{K,\sigma} \boldsymbol{u}^n_\sigma \cdot \boldsymbol{\varphi}^{n+1}_K - \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}} \sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F^n_{\sigma,\epsilon} \boldsymbol{u}^n_\epsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}^{n+1}_\sigma\Big| \leq Ch,$$

C dépend des normes de $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{u}$ et ρ.

- Sous une CFL renforcée de type

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\delta t^{(m)}}{\min_{K\in\mathcal{M}^{(m)}} h_K} = 0.$$

On vérifie à la limite l'inégalité d'entropie.

Étapes importantes de la preuve :

⚠ Pour l'équation d'énergie cinétique et la q.d.m., on doit traiter les flux duaux $F_{\sigma,\epsilon}$. On utilise alors un lemme liant les termes de convection des deux maillages

$$\Big|\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{K\in\mathcal{M}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)}F^n_{K,\sigma}\boldsymbol{u}^n_\sigma\cdot\boldsymbol{\varphi}^{n+1}_K-\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{int}}}\sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}F^n_{\sigma,\epsilon}\boldsymbol{u}^n_\epsilon\cdot\boldsymbol{\varphi}^{n+1}_\sigma\Big|\leq Ch,$$

C dépend des normes de $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{u}$ et ρ.

- Sous une CFL renforcée de type

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\delta t^{(m)}}{\min_{K\in\mathcal{M}^{(m)}}h_K}=0.$$

On vérifie à la limite l'inégalité d'entropie.

Travaux similaires

- Gallouët, Herbin, Latché, Mallem : Convergence du schéma MAC implicite pour Navier-Stokes incompressible et à densité variable.
- Latché, Saleh : Convergence du schéma implicite R-T/C-R pour Navier-Stokes incompressible à densité variable.
- Gallouët, Herbin, Novotny, Maltese : Convergence du schéma implicite pour Navier-Stokes compressible.
- Gallouët, Herbin, Latché, Saleh, Vignal : Limite bas-Mach du schéma à correction de pression pour Navier-Stokes.

Merci pour votre attention