

Schémas volumes finis préservant la limite bas Mach pour le système d'Euler

Marie Hélène Vignal

Institut de Mathématiques de Toulouse



Porquerolles 13-16 mai 2015

Travail en collaboration avec :

[Giacomo Dimarco](#), Univ. de Ferrara, Italie

[Raphael Loubere](#), IMT, CNRS, France

Plan

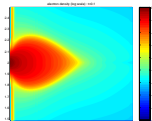
- 1 Contexte général
- 2 Le système d'Euler isentropique et sa limite bas Mach
- 3 Schémas classique et AP dans la limite bas Mach
- 4 Résultats numériques
- 5 Extension à Euler complet
- 6 Travaux en cours et perspectives

Contexte général

Modèles mathématiques M_ε dépendant d'un paramètre ε

Dans le domaine (espace-temps) ε peut

- être très petit comparé à l'échelle de référence
- être de l'ordre de l'échelle de référence
- prendre toutes les valeurs intermédiaires



Problèmes multi-échelles : échelle microscopique (petits ε)



échelle macroscopique (échelle de référence)

Difficultés :

- Schémas explicites : stables et consistants ssi les échelles microscopiques sont résolues
- Schémas implicites : inconditionnellement stables et consistants mais non linéaires

➡ coût très élevé

Contexte général

1^{ère} **solution** : utiliser le modèle asymptotique

$$M_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \text{Maillage indépendant des échelles liées à } \varepsilon$$

Problèmes

- M_0 valide dans les régions où $\varepsilon \ll 1 \quad \Rightarrow \quad 2$ modèles M_0 et M_ε
 - Où mettre l'interface ?
 - Comment reconnecter les deux modèles ?
 - Si ε varie en temps : interface mobile
 - \Rightarrow pb. numérique difficile en 2D ou 3D (VOF, Level set, ...)
- Pour M_0 : nécessité de conditions aux limites et initiales préparées au régime asymptotique

Contexte général

Autre solution : utiliser un schéma asymptotiquement préservant

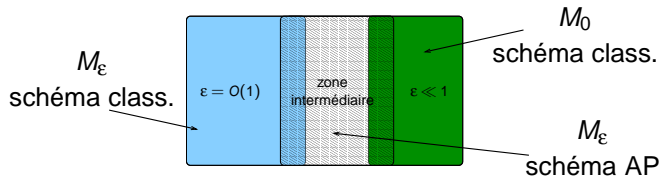
- Permet d'utiliser le modèle multi-échelles M_ε partout.
- On le discrétise avec un schéma préservant l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$
 - ➔ Maillage indépendant de ε : **Stabilité asymptotique.**
 - ➔ On obtient une approximation de la solution de M_0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$:
Consistance asymptotique.

Schéma asymptotiquement stable et consistant

⇒ **Schéma asymptotiquement préservant (AP)**

([S.Jin] cinétique \rightarrow fluide)

- Possibilité d'utiliser le schéma AP pour reconnecter M_ε et M_0



Plan

- 1 Contexte général
- 2 Le système d'Euler isentropique et sa limite bas Mach**
- 3 Schémas classique et AP dans la limite bas Mach
- 4 Résultats numériques
- 5 Extension à Euler complet
- 6 Travaux en cours et perspectives

Le modèle multi-échelles

Système d'Euler isentropique adimensionné

$$(M_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p(\rho) = 0, \end{cases}$$

Inconnues : ρ = densité du fluide, u = vitesse du fluide.

Données :

Pression : $p(\rho) = \rho^\gamma, \quad \gamma \geq 1,$

Nombre de Mach : $M^2 = \frac{m |u_0|^2}{\gamma p(\rho_0) / \rho_0} = \varepsilon.$

Limite bas Mach : $\varepsilon \rightarrow 0$

Le modèle asymptotique

Limite formelle : $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\nabla p(\rho) = 0, \quad \Rightarrow \quad \rho(x, t) = \rho(t) = \rho_0,$$

si les cond. aux limites sont indépendantes du temps.

Modèle limite : Euler incompressible

$$(M_0) \begin{cases} \rho = \text{cste} = \rho_0, & (1) \\ \nabla \cdot u = 0, & (1) \\ \rho_0 \partial_t u + \rho_0 \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla \pi_1 = 0. & (2) \end{cases}$$

où

$$\pi_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\rho(\rho) - \rho(\rho_0)).$$

Limite rigoureuse : [Klainerman, Majda, 81]

Equation explicite pour π_1

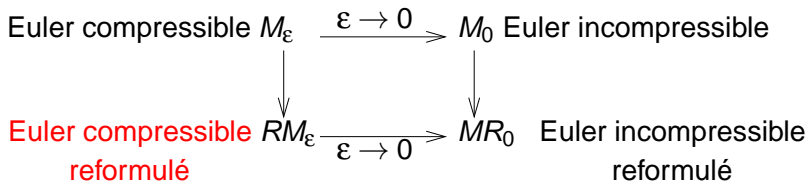
$$\nabla \cdot (2) - \rho_0 \partial_t (1) \Rightarrow -\Delta \pi_1 = \rho_0 \nabla^2 : (u \otimes u).$$

Reformulation des modèles

Modèle limite reformulé :

$$(MR_0) \begin{cases} \rho = \text{cste} = \rho_0, \\ -\Delta \pi_1 = \rho_0 \nabla^2 : (u \otimes u), \\ \rho_0 \partial_t u + \rho_0 \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla \pi_1 = 0. \end{cases}$$

Singularité de la limite



Complétons le diagramme.

Reformulation des modèles

A partir du modèle multi-échelles :

$$(M_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, & (1)' \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p(\rho) = 0, & (2)' \end{cases}$$

$$\nabla \cdot (2)' - \partial_t (1)' \Rightarrow \partial_{tt} \rho - \frac{1}{\varepsilon} \Delta p(\rho) = \nabla^2 : (\rho u \otimes u)$$

D'un point de vue numérique

- Traitement explicite \Rightarrow stabilité conditionnelle $\Delta t \leq \sqrt{\varepsilon} \Delta x$
- Traitement implicite \Rightarrow stabilité uniforme en ε

Plan

- 1 Contexte général
- 2 Le système d'Euler isentropique et sa limite bas Mach
- 3 Schémas classique et AP dans la limite bas Mach**
- 4 Résultats numériques
- 5 Extension à Euler complet
- 6 Travaux en cours et perspectives

Schémas préservant la limite bas Mach

- Méthodes de préconditionneurs : [Chorin 65], [Choi, Merkle 85], [Tukel, 87], [Van Leer, Lee, Roe, 91], [Li,Gu 08,10], ...
- Splitting et correcteur de pression : [Harlow, Amsden, 68,71], [Karki, Patankar, 89], [Bijl, Wesseling, 98], [Sewall, Tafti, 08], [Klein, Botta, Schneider, Munz, Roller 08], [Guillard, Murrone, Viozat 99, 04, 06] [Herbin, Kheriji, Latché 12,13], ...
 - Schémas asymptotiquement préservant [Degond, Deluzet, Sangam, V, 09], [Degond, Tang 11], [Cordier, Degond, Kumbaro 12], [Grenier, Vila, Villedieu 13] [Dellacherie, Omnes, Raviart, 13] [Dimarco, Loubère, V, en préparation]

Schéma classique

Si ρ^n et u^n connues au temps t^n

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^n = 0, \\ \frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p(\rho^n) = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1)_n \\ (2) \end{array}$$

Reformulation $\frac{(1)_{n+1} - (1)_n}{\Delta t} - \nabla \cdot (2) \Rightarrow$

$$\frac{\rho^{n+2} - 2\rho^{n+1} + \rho^n}{\Delta t^2} - \frac{1}{\varepsilon} \Delta p(\rho^n) = \nabla^2 : (\rho u \otimes u)^n$$

- Traitement explicite \Rightarrow stabilité conditionnelle $\Delta t \leq \sqrt{\varepsilon} \Delta x$
- $\varepsilon \rightarrow 0$ donne $\nabla p(\rho^n) = 0 \Rightarrow$ non consistance à la limite

Schéma AP dans la limite bas Mach

But : Construire un schéma AP pour le modèle multi-échelles

- Stabilité uniforme par rapport à $\varepsilon \Rightarrow \Delta t = o(1)$
- Consistance : $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow$ schéma pour le modèle macroscopique

Idées de base :

- expliciter les bons termes
- reformuler pour faire apparaître le modèle limite

Schéma AP, Euler-Lorentz, limites bas Mach et de dérive

[P. Degond, F. Deluzet, A. Sangam, MHV, JCP 2009]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^{n+1} = 0, \\ \left(\frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n \right) + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \rho)^{n+1/2} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{\varepsilon} \left(\rho^n E^{n+1} + (\rho u \times B)^{n+1} \right), \\ (\nabla \rho)^{n+1/2} = (\nabla \rho)_{//}^{n+1} + (\nabla \rho)_{\perp}^n. \end{array} \right.$$

Schéma AP dans la limite bas Mach

Schéma AP, Euler, limite bas Mach

[P. Degond, M. Tang, Commun. Comput. Phys, 2011]

$$\begin{cases} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^{n+1} = 0, \\ \frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n + \alpha \nabla p(\rho^n) + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \alpha \right) \nabla p(\rho^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

- Paramètre α fixé par l'utilisateur, dépend du problème considéré
 - Si $\varepsilon \ll 1$ alors α petit
 - Si $\varepsilon = O(1)$ alors α suffisamment grand

Extension à Euler complet et Navier-Stokes :

[F. Cordier, P. Degond, A. Kumbaro, JCP 2012]

Schéma AP dans la limite bas Mach

Notre schéma AP : Si ρ^n et u^n connues au temps t^n

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^{n+1} = 0, \quad (1)_n \\ \frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p(\rho^{n+1}) = 0. \quad (2) \end{array} \right.$$

Reformulation $\frac{(1)_n - (1)_{n-1}}{\Delta t} - \nabla \cdot (2) \Rightarrow$

$$\frac{\rho^{n+1} - 2\rho^n + \rho^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{1}{\varepsilon} \Delta p(\rho^{n+1}) = \nabla^2 : (\rho u \otimes u)^n$$

- Traitement implicite \Rightarrow stabilité uniforme en ε
- $\varepsilon \rightarrow 0$ donne $\nabla p(\rho^{n+1}) = 0 \Rightarrow$ consistance à la limite

Schéma AP dans la limite bas Mach

Autre reformulation

$$\nabla \cdot (2) \Rightarrow \nabla \cdot (\rho u)^{n+1} = \nabla \cdot (\rho u)^n - \Delta t \nabla^2 : (\rho u \otimes u)^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \Delta p(\rho^{n+1})$$

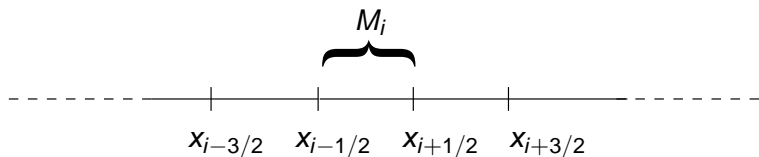
On insère dans l'équation de masse (1)

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \Delta p(\rho^{n+1}) - \Delta t \nabla^2 : (\rho u \otimes u)^n = 0.$$

Formulation découplée du schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \Delta p(\rho^{n+1}) - \Delta t \nabla^2 : (\rho u \otimes u)^n = 0, \\ \frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p(\rho^{n+1}) = 0. \end{array} \right.$$

Discrétisation espace-temps en 1-D



Etape 1 calcul des ρ_i^{n+1} connaissant les $U_i^n = (\rho_i^n, (\rho u)_i^n)$

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{f(U_i^n, U_{i+1}^n) - f(U_{i-1}^n, U_i^n)}{\Delta x} - \underbrace{\frac{\Delta t}{\varepsilon} \Delta_{dis} \rho(\rho^{n+1}) - \Delta t \Delta_{dis} (\rho u^2)^n}_{\text{pour schéma AP}} = 0.$$

- Flux de Rusanov

$$f(U_i^n, U_{i+1}^n) = \frac{(\rho u)_i^n + (\rho u)_{i+1}^n}{2} - \frac{\Lambda_{i+1/2}^n}{2} (\rho_i^n - \rho_{i+1}^n).$$

Discretisation espace-temps en 1-D

Choix de $\Lambda_{i+1/2}^n$ et Δt

$$\Lambda_{i+1/2}^n = \max(\lambda_i^n, \lambda_{i+1}^n), \quad \text{C.F.L. : } \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max_i \Lambda_{i+1/2}^n}.$$

- Schéma classique : Euler $\Leftrightarrow \partial_t U + DF(U) \partial_x U = 0$.

λ_i^n plus grde val. prop. en val. abs. de $DF(U_i^n)$

$$\lambda_i^n = \max(|u_i^n + \sqrt{\rho'(\rho_i^n)/\varepsilon}|, |u_i^n - \sqrt{\rho'(\rho_i^n)/\varepsilon}|) = O(\sqrt{\varepsilon})$$

- Schéma AP : Euler $\Leftrightarrow \partial_t U + \underbrace{DF_i(U)}_{\text{implicite}} \partial_x U + \underbrace{DF_e(U)}_{\text{explicite}} \partial_x U = 0$.

λ_i^n plus grde val. prop. en val. abs. de $DF_e(U_i^n)$

$$\lambda_i^n = \max(0, |2u_i^n|) = |2u_i^n|$$

Discretisation espace-temps en 1-D

Etape 2 calcul des $(\rho u)_i^{n+1}$ connaissant les $V_i^n = (U_i^n, \rho_i^{n+1})$

$$\frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n}{\Delta t} + \frac{g(V_i^n, V_{i+1}^n) - g(V_{i-1}^n, V_i^n)}{\Delta x} = 0$$

Flux donnés par

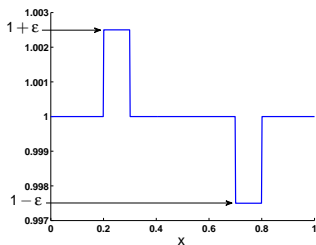
$$g(V_i^n, V_{i+1}^n) = \frac{(\rho u^2)_i^n + \rho(\rho_i^{n+1})/\varepsilon + (\rho u^2)_{i+1}^n + \rho(\rho_{i+1}^{n+1})/\varepsilon}{2} - \frac{\Lambda_{i+1/2}^n}{2} ((\rho u)_i^n - (\rho u)_{i+1}^n).$$

Plan

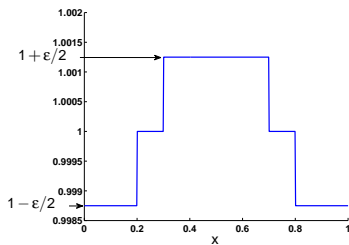
- 1 Contexte général
- 2 Le système d'Euler isentropique et sa limite bas Mach
- 3 Schémas classique et AP dans la limite bas Mach
- 4 Résultats numériques**
- 5 Extension à Euler complet
- 6 Travaux en cours et perspectives

Comparaison schémas classique et AP

- Domaine $[0, 1]$, $\Delta x = 1/500$
- Temps final : $T = 0.05$,
- Loi de pression $p(\rho) = \rho^\gamma$, $\gamma = 2$



Densité initiale



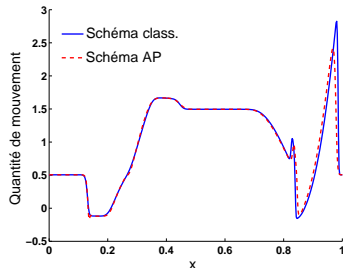
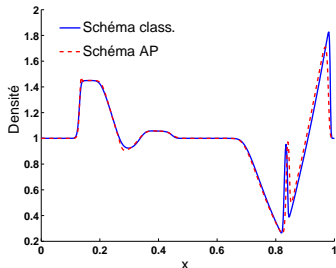
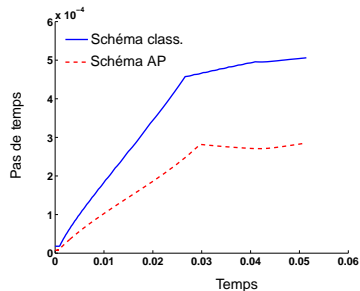
Quantité de mouvement initiale

Cas non linéaire $\gamma = 2$ et $\varepsilon = O(1)$

$\varepsilon = 0.99$

Class : 273 itérations
tps CPU 0.07

AP : 510 itérations
tps CPU 1.46

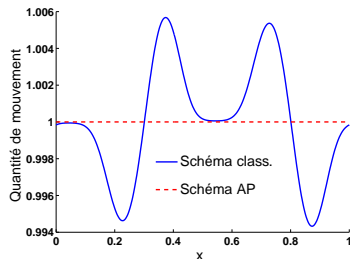
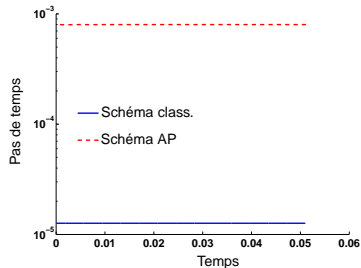
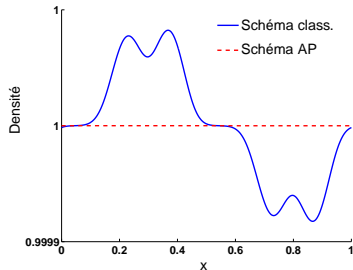


Cas non linéaire $\gamma = 2$ et $\varepsilon \ll 1$

$$\varepsilon = 10^{-4}$$

Class : 4036 itérations
tps CPU 0.82

AP : 57 itérations
tps CPU 0.14

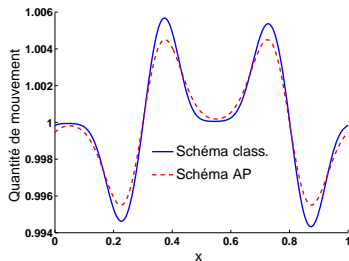
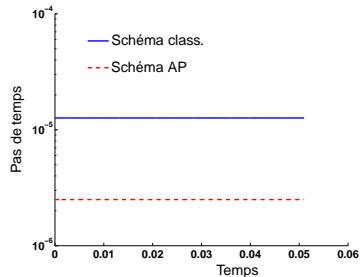
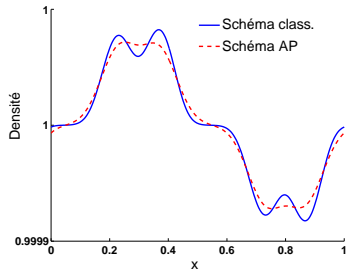


Cas non linéaire $\gamma = 2$ et $\varepsilon \ll 1$

$$\varepsilon = 10^{-4}$$

Mise en évidence de

la viscosité

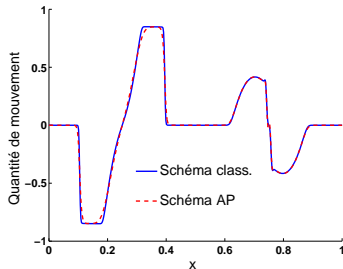
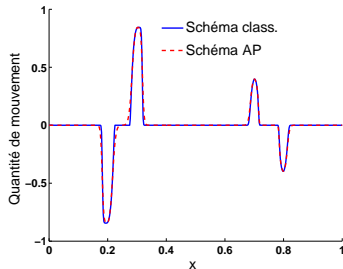
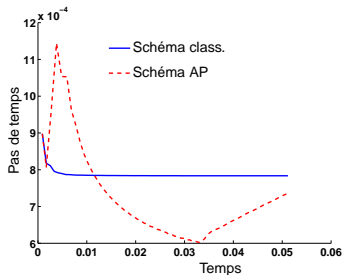


Cas non linéaire $\gamma = 2$, vitesse nulle

$$\varepsilon = 0.99$$

Même densité initiale

Mais vitesse initiale nulle



Plan

- 1 Contexte général
- 2 Le système d'Euler isentropique et sa limite bas Mach
- 3 Schémas classique et AP dans la limite bas Mach
- 4 Résultats numériques
- 5 Extension à Euler complet**
- 6 Travaux en cours et perspectives

Euler complet et sa limite bas Mach

Euler complet

$$(M_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p = 0, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p) u) = 0, \\ \rho = (\gamma - 1) \left(E - \varepsilon \frac{\rho u^2}{2} \right). \end{cases}$$

Limite $\varepsilon \rightarrow 0$ donne $\nabla p = (\gamma - 1) \nabla E = 0 \Rightarrow \nabla \cdot u = 0$

Euler incompressible

$$(M_0) \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi_1 = 0, \\ \rho = (\gamma - 1) E = \text{cste} = \rho_0. \end{cases}$$

Première idée

Extension du schéma précédent

$$(M_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^n = 0, \\ \frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p^{n+1} = 0, \\ \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \nabla \cdot ((E + p)^n u^{n+1}) = 0, \\ p^{n+1} = (\gamma - 1) \left(E^{n+1} - \varepsilon \frac{(\rho u^2)^{n+1}}{2} \right). \end{array} \right.$$

Problème

On ne peut pas découpler sans travailler sur l'équation en pression (variable non conservative)

Euler complet

Idée [F. Cordier, P. Degond, A. Kumbaro, JCP 2012]

$$(M_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^n = 0, \\ \frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n + \alpha \nabla p^n + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \alpha\right) \nabla p^{n+1} = 0, \\ \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \nabla \cdot ((E + p)^n u^{n+1}) = 0, \\ p^{n+1} = (\gamma - 1) \left(E^{n+1} - \varepsilon \frac{(\rho u^2)^n}{2} \right). \end{array} \right.$$

Problème On peut découpler mais α fixé par l'utilisateur et dépend de ε .

Solution ? Comme pour Euler isentropique $\alpha = 0$

$$\text{Euler} \Leftrightarrow \partial_t U + \underbrace{DF_i(U)}_{\text{implicite}} \partial_x U + \underbrace{DF_e(U)}_{\text{explicite}} \partial_x U = 0.$$

DF_e peut avoir des valeurs propres complexes \Rightarrow **Mauvais**

Euler complet, schéma AP

Notre schéma AP

$$(M_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^{n+1} = 0, \\ \frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p^{n+1} = 0, \\ \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left((E + p)^n \frac{(\rho u)^{n+1}}{\rho^n} \right) = 0, \\ p^{n+1} = (\gamma - 1) \left(E^{n+1} - \varepsilon \frac{(\rho u^2)^n}{2} \right). \end{array} \right.$$

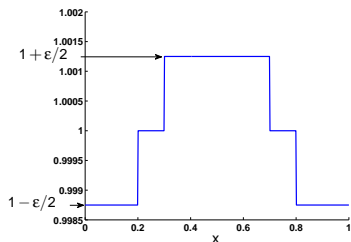
Améliorations

- On peut découpler en travaillant sur l'énergie totale E
- Valeurs propres de la partie explicite DF_e : $0, \gamma u, (3 - \gamma) u$

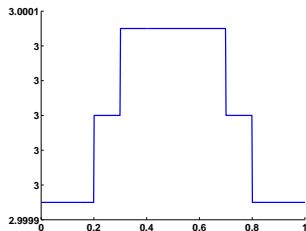
$$\text{Euler} \Leftrightarrow \partial_t U + \underbrace{DF_i(U)}_{\text{implicite}} \partial_x U + \underbrace{DF_e(U)}_{\text{explicite}} \partial_x U = 0.$$

Résultats numériques

- Domaine $[0, 1]$, $\Delta x = 1/500$
- Temps final : $T = 0.05$,
- $\gamma = 1.4$, $\rho(t=0) = 1$, $p(t=0) = 1$



Quantité de mouvement initiale

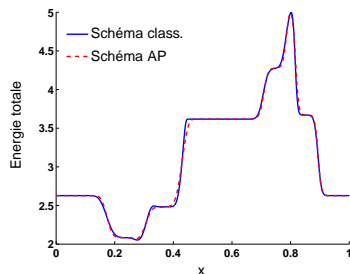
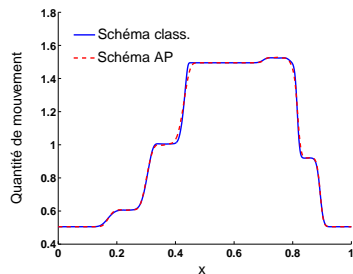
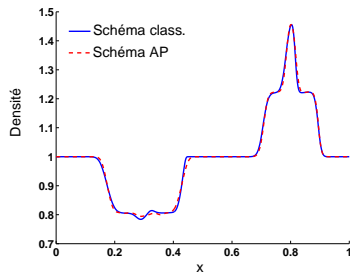
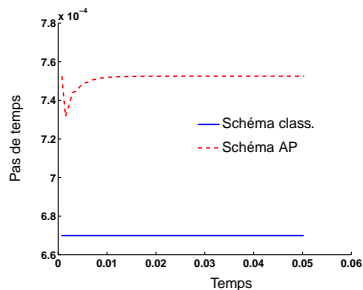


Energie totale initiale

Comparaison schémas classique et AP, $\varepsilon = 0.99$

Class : 75 itérations, CPU 0.02

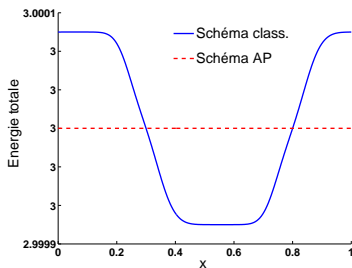
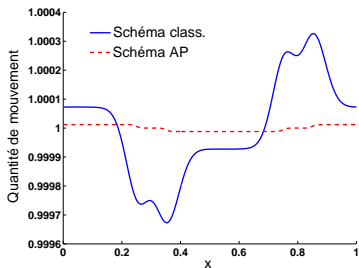
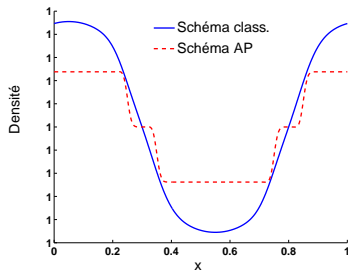
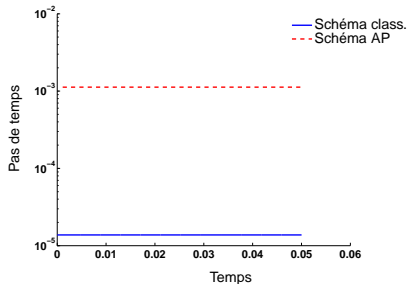
AP : 67 itérations, CPU 0.08



Comparaison schémas classique et AP, $\varepsilon = 10^{-4}$

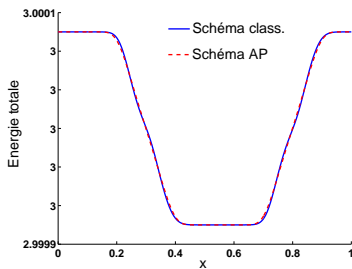
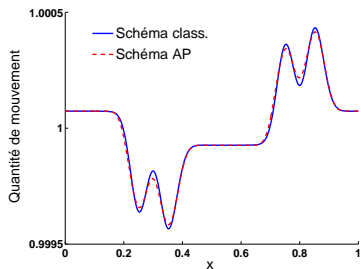
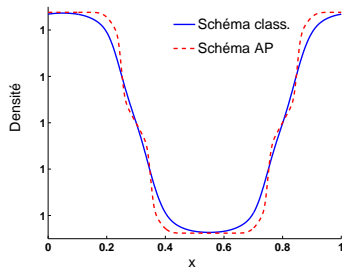
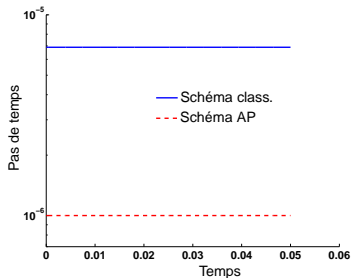
Class : 3629 itérations, CPU 0.86

AP : 45 itérations, CPU 0.06



Comparaison schémas classique et AP, $\varepsilon = 10^{-4}$

Mise en évidence de la viscosité, 1000 mailles



Travaux en cours et perspectives

- Montée en ordre espace-temps qui préserve le caractère AP, cas tests multi-dimensionnels
- Analyse du schéma, montrer le caractère AP, maillages décalés [Herbin, Latché, Saleh, V]
- Données initiales et/ou aux limites non préparées, [Métivier, Schochet, 2001], [Alazard, 2005]
- Utiliser le schéma AP seulement dans les zones intermédiaires
⇒ Décomposition de domaine