
Un schéma à mailles décalées convergent pour les équations
de Navier-Stokes incompressibles à densité variable

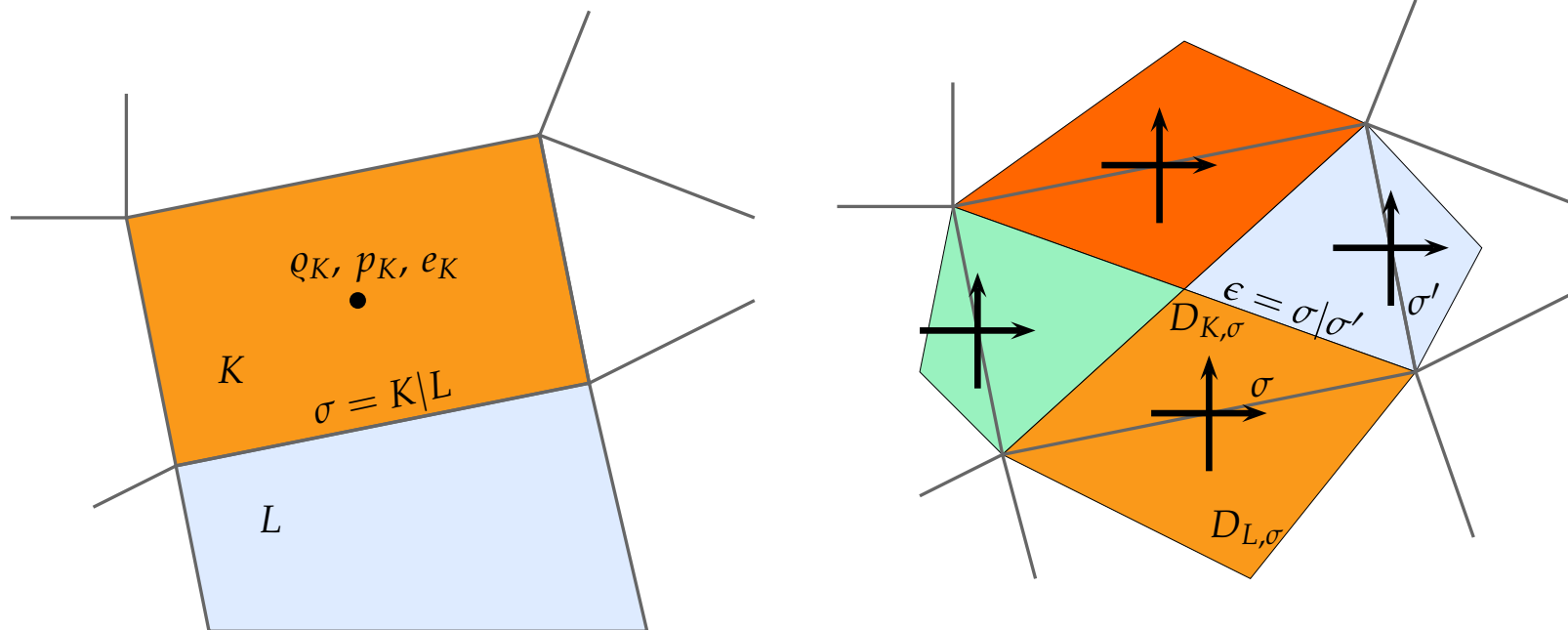
Khaled SALEH

Institut Camille Jordan,
Université Claude Bernard, Lyon I

Travail en collaboration avec Jean-Claude LATCHÉ (IRSN)

Workshop MODTERCOM
Mardi 8 septembre 2014, Porquerolles

Discretisation spatiale



- Maillage primal : $\mathcal{M} = \{\text{ensemble de volumes de contr\^ole } K\}$. K quadrilat\^ere convexe en 2D, hexa\^edre convexe en 3D.
 - Variables scalaires au centre des cellules du maillage primal: $(\rho_K)_{K \in \mathcal{M}}$, $(p_K)_{K \in \mathcal{M}}$.
 - Vitesse aux interfaces : $(\mathbf{u}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$.
 - Maillage dual: $\mathcal{D} = (D_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}} = \{\text{ensemble des mailles duales}\}$.
-

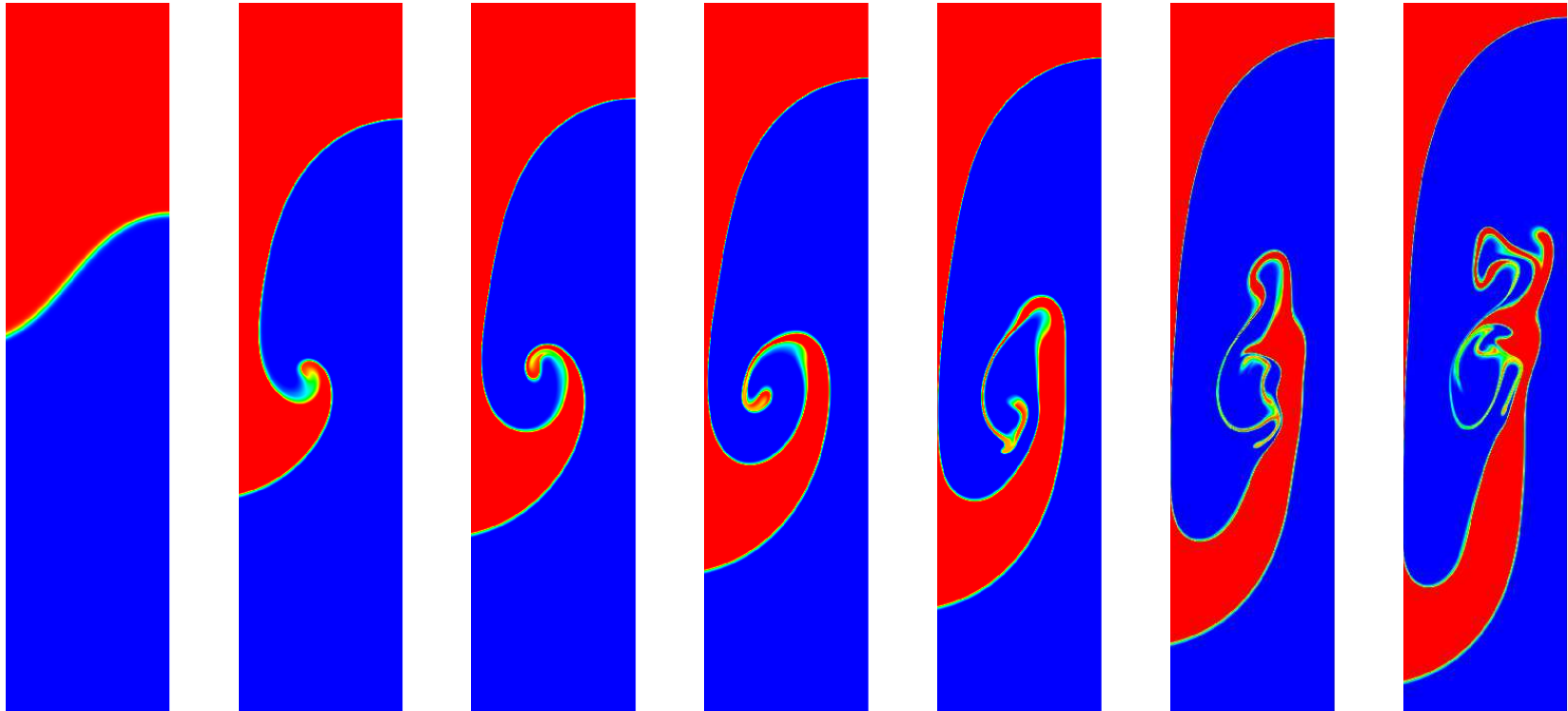
Navier-Stokes incompressible à masse volumique variable

$$\partial_t(\rho c_p \vartheta) + \operatorname{div}(\rho c_p \vartheta \mathbf{u}) = 0,$$

$$\rho = \mathcal{F}(\theta),$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{g}.$$



Navier-Stokes incompressible à masse volumique variable

$$\partial_t(\rho c_p \vartheta) + \operatorname{div}(\rho c_p \vartheta \mathbf{u}) = 0,$$

$$\rho = \mathcal{F}(\vartheta),$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) + \nabla p = 0.$$

Ce modèle est équivalent à :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

Sur un domaine borné $(0, T) \times \Omega$, on démontre la **convergence du schéma à mailles décalées** avec les conditions initiales et limites suivantes :

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \geq \rho_{\min} > 0.$$

Navier-Stokes incompressible à masse volumique variable

Sur $(0, T) \times \Omega$ où Ω domaine borné connexe de \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

avec $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0$ et $\rho|_{t=0} = \rho_0 \geq \rho_{\min} > 0$.

Navier-Stokes incompressible à masse volumique variable

Sur $(0, T) \times \Omega$ où Ω domaine borné connexe de \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

avec $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0$ et $\rho|_{t=0} = \rho_0 \geq \rho_{\min} > 0$.

Estimations *a priori* pour ρ :

- Transport pur de ρ :

$$\min_{\Omega} \rho_0 \leq \rho \leq \max_{\Omega} \rho_0.$$

- Pour toute fonction $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ régulière :

$$\partial_t \beta(\rho) + \operatorname{div}(\beta(\rho) \mathbf{u}) = 0.$$

Navier-Stokes incompressible à masse volumique variable

Sur $(0, T) \times \Omega$ où Ω domaine borné connexe de \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

avec $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0$ et $\rho|_{t=0} = \rho_0 \geq \rho_{\min} > 0$.

Estimations *a priori* pour \mathbf{u} :

- Equation d'énergie cinétique :

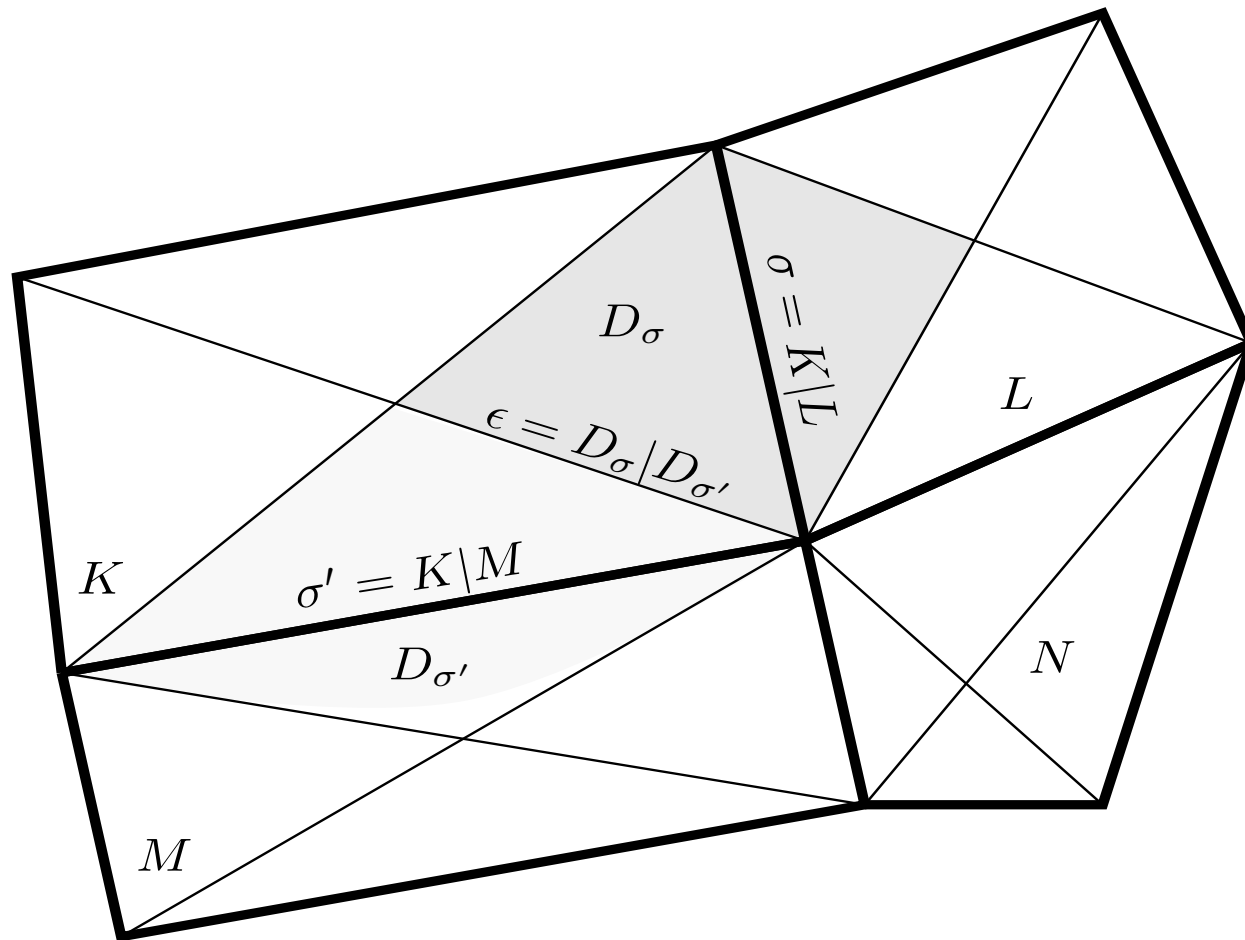
$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) - \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- Contrôle dans $L^\infty((0, T); L^2(\Omega)^d) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega)^d)$:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\cdot, t) |\mathbf{u}(\cdot, t)|^2 \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \, dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 \, dx, \quad \forall t \in (0, T).$$

Un schéma à mailles décalées

Notations :



Un schéma à mailles décalées

Schéma implicite :

$$(\operatorname{div} \mathbf{u})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma - \rho_\sigma^* \mathbf{u}_\sigma^*) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon - (\Delta \mathbf{u})_\sigma + (\nabla p)_\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

avec :

$$(\operatorname{div} \mathbf{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$$

$$F_{K,\sigma} = |\sigma| \hat{\rho}_\sigma \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \hat{\rho}_\sigma \text{ upwind}$$

$$(\nabla p)_\sigma = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma},$$

$-(\Delta \mathbf{u})_\sigma$ discrétisé par des **éléments finis** de Rannacher-Turek.

Un schéma à mailles décalées

Schéma implicite :

$$(\operatorname{div} \mathbf{u})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma - \rho_\sigma^* \mathbf{u}_\sigma^*) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon - (\Delta \mathbf{u})_\sigma + (\nabla p)_\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

Propriétés du schéma (1/4) :

- Dualité gradient-divergence :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K| p_K (\operatorname{div} \mathbf{v})_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| \mathbf{v}_\sigma \cdot (\nabla p)_\sigma = 0, \quad \text{pour tous } (p_K)_{K \in \mathcal{M}}, (\mathbf{v}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}}.$$

Un schéma à mailles décalées

Schéma implicite :

$$(\operatorname{div} \mathbf{u})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma - \rho_\sigma^* \mathbf{u}_\sigma^*) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon - (\Delta \mathbf{u})_\sigma + (\nabla p)_\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

Propriétés du schéma (2/4) :

- Coercivité du laplacien discret (EF de Rannacher-Turek) :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| - (\Delta \mathbf{v})_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma = \|\mathbf{v}\|_{1,d}^2 \quad \text{pour tout } (\mathbf{v}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}}$$

- Condition LBB (inf-sup) discrète (via un opérateur de Fortin) :

$$\inf_{p \in Q_h} \sup_{\mathbf{u} \in V_h^d} \frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div}_h \mathbf{u}}{\|p\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{1,d}} \geq \beta.$$

Un schéma à mailles décalées

Schéma implicite :

$$(\operatorname{div} \mathbf{u})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma - \rho_\sigma^* \mathbf{u}_\sigma^*) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon - (\Delta \mathbf{u})_\sigma + (\nabla p)_\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

Propriétés du schéma (3/4) :

- Principe du maximum pour ρ :

$$\rho_{\min} \leq \rho_K^n \leq \rho_{\max}, \quad \forall K \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}.$$

- Pour toute fonction $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe : Il existe $R_K \geq 0$ t.q.

$$\frac{1}{\delta t} (\beta(\rho_K) - \beta(\rho_K^*)) + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \beta(\hat{\rho}_\sigma) \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} + R_K = 0, \quad K \in \mathcal{M}.$$

Un schéma à mailles décalées

Schéma implicite :

$$(\operatorname{div} \mathbf{u})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma - \rho_\sigma^* \mathbf{u}_\sigma^*) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon - (\Delta \mathbf{u})_\sigma + (\nabla p)_\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

Propriétés du schéma (4/4) :

- Les densités ρ_σ et les flux duaux $F_{\sigma,\epsilon}$ sont construits pour **imposer une équation locale d'énergie cinétique discrète** : il existe $R_\sigma \geq 0$ t.q. :

$$\frac{1}{2\delta t} (\rho_\sigma |\mathbf{u}_\sigma|^2 - \rho_\sigma^* |\mathbf{u}_\sigma^*|^2) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \epsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}}} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{u}_{\sigma'} - (\Delta \mathbf{u})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma + (\nabla p)_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma + R_\sigma = 0,$$

- Contrôle dans des **normes** $L^\infty((0, T); L^2(\Omega)^d) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega)^d)$ **discrètes** :

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| \rho_\sigma |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 + \sum_{k=1}^n \delta t \|\mathbf{u}^k\|_{1,d}^2 \leq C(\rho_0, \mathbf{u}_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

↓

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$



Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

↓

$$\mathbf{u} \cdot \left\{ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0. \right\}$$



Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

$$\rho \left(\partial_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \cdot \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$



Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

$$\rho \left(\partial_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$

$$\partial_t \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} - \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- L'équation de conservation de la masse a été utilisée **deux fois**.
-

Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

$$\rho \left(\partial_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$

$$\partial_t \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} - \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- L'équation de conservation de la masse a été utilisée **deux fois**.
- Les deux équations **ne sont pas discrétisées sur le même maillage !**

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma - \rho_\sigma^* \mathbf{u}_\sigma^*) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon - (\Delta \mathbf{u})_\sigma + (\nabla p)_\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$



Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

Théorème (Herbin, Kheriji, Latché) :

- **Supposons** un bilan de masse vérifié sur les cellules du maillage dual :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

avec $\rho_\sigma > 0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$.

- **Alors** une équation locale d'énergie cinétique discrète est vérifiée sur ce maillage :

$$\frac{1}{2\delta t} (\rho_\sigma |\mathbf{u}_\sigma|^2 - \rho_\sigma^* |\mathbf{u}_\sigma^*|^2) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \epsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}}} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{u}_{\sigma'} - (\text{div } \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}))_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma + (\nabla p)_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma \leq 0.$$



Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

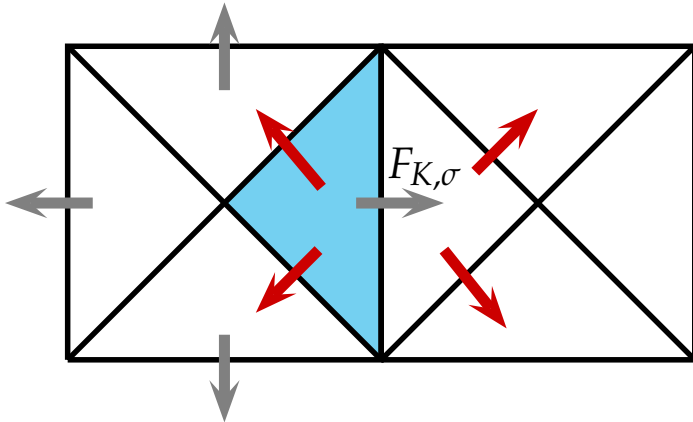
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

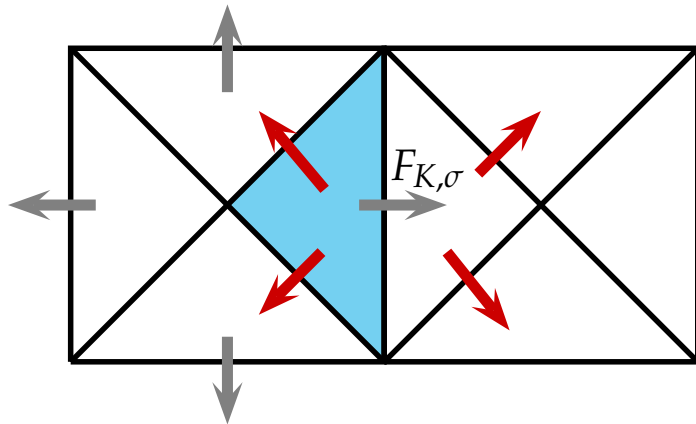
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit w tel que $\text{div} w = cste$ et pour toute face σ de K :

$$\int_{\sigma} w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\epsilon} w \cdot n_{\sigma,\epsilon}$.

Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

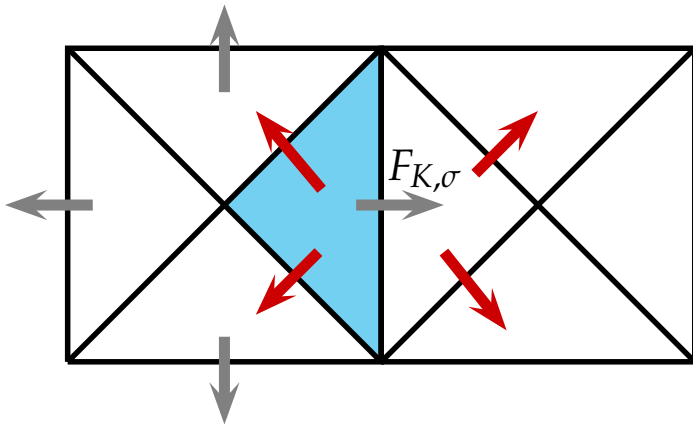
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit w tel que $\text{div} w = cste$ et pour toute face σ de K :

$$\int_{\sigma} w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\epsilon} w \cdot n_{\sigma,\epsilon}.$

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} &= \int_{\partial D_{K,\sigma}} w \cdot n = \int_{D_{K,\sigma}} \text{div} w = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_K \text{div} w = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_{\partial K} w \cdot n \\ &= \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = -\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) \end{aligned}$$

Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

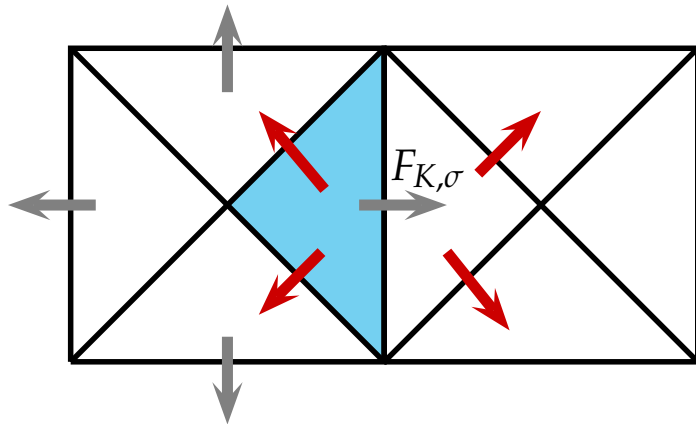
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit w tel que $\text{div} w = cste$ et pour toute face σ de K :

$$\int_\sigma w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_\epsilon w \cdot n_{\sigma,\epsilon}$.

$$\frac{|D_{K,\sigma}|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = 0,$$

Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

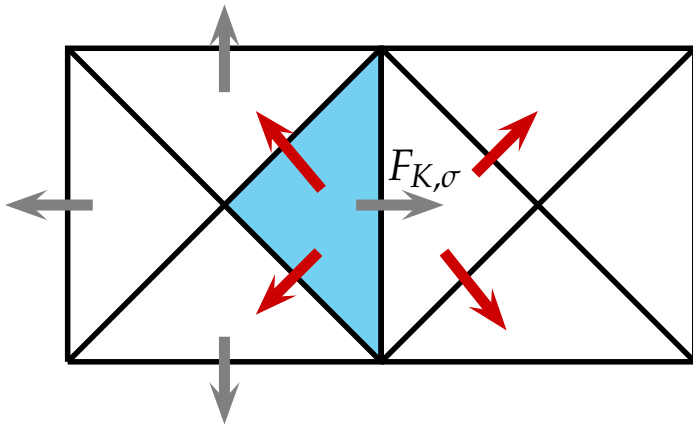
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit w tel que $\text{div} w = cste$ et pour toute face σ de K :

$$\int_{\sigma} w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\epsilon} w \cdot n_{\sigma,\epsilon} .$

$$\frac{|D_{K,\sigma}|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{|D_{L,\sigma}|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + F_{L,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset L}} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

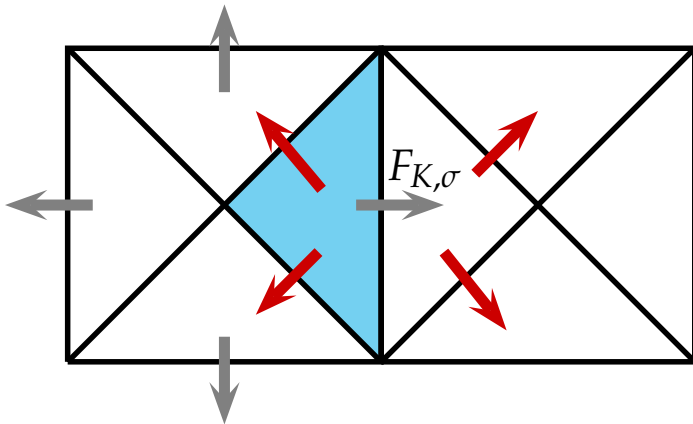
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit w tel que $\text{div} w = cste$ et pour toute face σ de K :

$$\int_{\sigma} w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

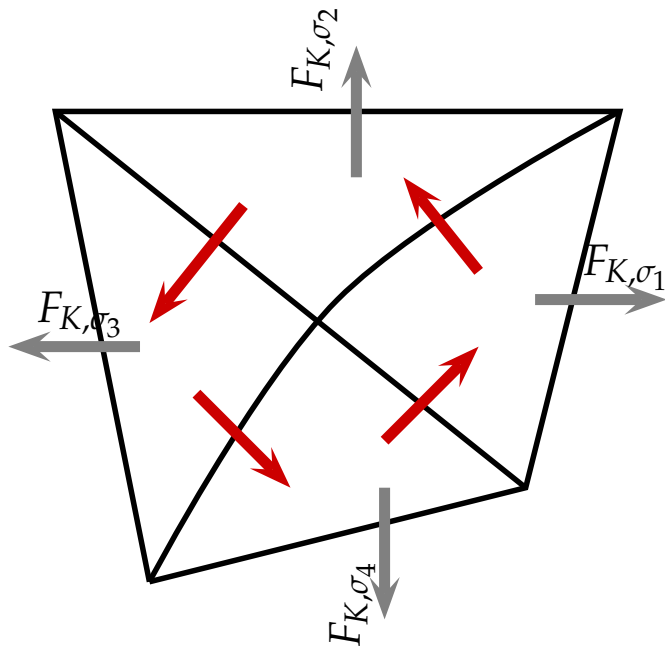
On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\epsilon} w \cdot n_{\sigma,\epsilon} .$

$$\frac{1}{\delta t} \left(\underbrace{|D_{K,\sigma}| \rho_K + |D_{L,\sigma}| \rho_L}_{=: |D_\sigma| \rho_\sigma} - |D_{K,\sigma}| \rho_K^* - |D_{L,\sigma}| \rho_L^* \right) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

Energie cinétique discrète : calcul de ρ_σ et $F_{\sigma,\epsilon}$

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\partial D_{K,\sigma}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \int_{D_{K,\sigma}} \operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_K \operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_{\partial K} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$$
$$= \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = -\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*)$$

avec $\zeta_K^\sigma = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}$ indépendant de K et σ .



On résout le système linéaire :

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \zeta_K^\sigma \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}(K).$$

Convergence du schéma

Solutions faibles :

Soit $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ t.q. $\rho_0 > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)^d$. Une solution faible est un couple (ρ, u) t.q. :

- $\rho \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ et $\rho > 0$ p.p dans $\Omega \times (0, T)$.
- $u \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega)^d) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega)^d)$ et $\operatorname{div} u = 0$ p.p dans $\Omega \times (0, T)$.
- Pour tout ϕ dans $C_c^\infty(\Omega \times [0, T))$,

$$- \int_0^T \int_\Omega (\rho \partial_t \phi + \rho u \cdot \nabla \phi) \, dx \, dt = \int_\Omega \rho_0 \phi(\cdot, 0) \, dx.$$

- Pour tout v dans $C_c^\infty(\Omega \times [0, T))^d$ t.q. $\operatorname{div} v = 0$,

$$\int_0^T \int_\Omega \left(-\rho u \cdot \partial_t v - (\rho u \otimes u) : \nabla v + \nabla u : \nabla v \right) \, dx \, dt = \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot v(\cdot, 0) \, dx.$$

Convergence du schéma

Soit $(\mathcal{M}^{(m)}, D^{(m)}, \delta t^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de discrétisations à mailles décalées telles que $h^{(m)} \rightarrow 0$ et $\delta t^{(m)} \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow \infty$.

$$\text{Soit : } \rho^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{M}} \rho_K^n \chi_K(\mathbf{x}) \chi_{(n-1, n]}(t),$$

$$p^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{M}} p_K^n \chi_K(\mathbf{x}) \chi_{(n-1, n]}(t),$$

$$\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{N^{(m)}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{u}_{\sigma}^n \chi_{D_{\sigma}} \chi_{(t^n, t^{n+1})}.$$

Théorème (J.C. Latché, K.S.) : *Sous certaines contraintes de régularité sur le maillage, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une solution $(\rho^{(m)}, p^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})$ au schéma implicite. De plus, il existe $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}})$ solution faible du problème continu telle qu'à extraction d'une sous-suite près:*

$$\rho^{(m)} \rightarrow \bar{\rho} \quad \text{fortement dans } L^q((0, T) \times \Omega), \text{ pour tout } q \in [1, \infty),$$

$$\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \bar{\mathbf{u}} \quad \text{fortement dans } L^2((0, T) \times \Omega).$$

Convergence du schéma

Marche à suivre :

- Estimations *a priori* sur la solution discrète $(\rho^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})$.
 - **Compacité** : à extraction près, $\rho^{(m)} \rightarrow \bar{\rho}$ et $\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \bar{\mathbf{u}}$ dans certaines normes (analyse fonctionnelle discrète...).
 - **Passage à la limite** dans la formulation faible du schéma, le couple $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}})$ est une solution faible du problème.
-

Convergence du schéma

Estimations *a priori* :

- Principe du max $\implies \|\rho^{(m)}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq C.$
- Energie cinétique $\implies \|\mathbf{u}\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega)^d)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2((0,T);H_{1,d})} \leq C.$

Compacité :

- Il existe $\bar{\rho} \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$ tel que $\rho^{(m)} \rightharpoonup \bar{\rho}$ **faible étoile** dans $L^\infty((0,T)\times\Omega)$.
- Version **discrète du Lemme d'Aubin-Simon** (c.f. Gallouët, Latché et Chénier, Eymard, Gallouët, Herbin) :

Il existe $\bar{\mathbf{u}}$ dans $L^\infty((0,T);L^2(\Omega)^d) \cap L^2((0,T);H_0^1(\Omega)^d)$ tel que

$$\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \bar{\mathbf{u}} \quad \text{fortement dans } L^2((0,T)\times\Omega).$$

Convergence du schéma

Lemme d'Aubin-Simon :

(H1) Soit X, B, Y trois espaces de Banach tel que :

$$X \underset{\text{compact}}{\subset} B \underset{\text{continue}}{\subset} Y.$$

(H2) Soit $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite $L^q((0, T); B)$ telle que :

$$\forall m, \quad \|u^{(m)}\|_{L^q((0, T); X)} + \|d_t u^{(m)}\|_{L^q((0, T); Y)} \leq C$$

Alors il existe $\bar{u} \in L^q((0, T); B)$ qu'à extraction d'une sous-suite près, $u^{(m)} \rightarrow \bar{u}$ dans $L^q((0, T); B)$.

Convergence du schéma

$$u^{(m)}(t) := \sum_{n=0}^{N^{(m)}} u^n \chi_{(t^n, t^{n+1})} \in B^{(m)} \subset B$$
$$\partial_t(u)^{(m)}(t) := \sum_{n=0}^{N^{(m)}} \frac{1}{\delta t^{(m)}} \left\{ (u^n)^{(m)} - (u^{n-1})^{(m)} \right\} \chi_{(t^n, t^{n+1})}.$$

Lemme d'Aubin-Simon discret (Gallouët, Latché et Chénier, Eymard, Gallouët, Herbin)

Soit $\|\cdot\|_{X^{(m)}}$ et $\|\cdot\|_{Y^{(m)}}$ deux normes sur $B^{(m)}$ t.q.

(H1) Pour tout $C > 0$, $\left\{ u^{(m)} \in B^{(m)}, \|u^{(m)}\|_{X^{(m)}} \leq C \right\}_{\text{compact}} \subset B$.

(H1bis) Si $u^{(m)} \rightarrow u$ dans B , $\|u^{(m)}\|_{X^{(m)}} \leq C$, et $\|u^{(m)}\|_{Y^{(m)}} \rightarrow 0$, alors $u = 0$.

(H2) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N^{(m)}} \delta t^{(m)} \|(u^n)^{(m)}\|_{X^{(m)}}^q + \sum_{n=0}^{N^{(m)}} \delta t^{(m)} \|\partial_t(u^n)^{(m)}\|_{Y^{(m)}}^q \leq C$.

Alors il existe $\bar{u} \in L^q((0, T); B)$ tel qu'à extraction d'une sous-suite près, $u^{(m)} \rightarrow \bar{u}$ dans $L^q((0, T); B)$.

Convergence du schéma

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \mathbf{u} &= \partial_t(\rho \mathbf{u}) - \mathbf{u} \partial_t \rho \\ &= -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{u} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \\ &= -\rho \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} - \nabla p\end{aligned}$$

Soit $\mathbf{v} \in E(\Omega) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$ tel que $\|\mathbf{v}\|_{H^1} = 1$:

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = - \int_{\Omega} \rho \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$$

$$\implies \left| \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right| \leq C \|\rho\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \|\mathbf{v}\|_{H^1} + \|\mathbf{u}\|_{H^1} \|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C(1 + \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2)$$

$$\implies \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^1((0,T);E(\Omega)')} \leq CT + C\|\mathbf{u}\|_{L^2((0,T);H^1(\Omega)^d)}^2 \leq C'.$$

Convergence du schéma

$$\begin{aligned}
 \rho_{D_\sigma}^{n-1} \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^n - \mathbf{u}_\sigma^{n-1}) &= \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^n - \rho_{D_\sigma}^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^{n-1}) - \mathbf{u}_\sigma^n \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^n - \rho_{D_\sigma}^{n-1}) \\
 &= -|D_\sigma|^{-1} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^n \mathbf{u}_\epsilon^n + (\Delta \mathbf{u})_\sigma^n - (\nabla p)_\sigma^n + |D_\sigma|^{-1} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^n \mathbf{u}_\sigma^n \\
 &= -|D_\sigma|^{-1} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^n (\mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{u}_\sigma^n) + (\Delta \mathbf{u})_\sigma^n - (\nabla p)_\sigma^n
 \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{v} \in E_{\mathcal{E}}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega), (\operatorname{div} \mathbf{v})_K = 0, \forall K \in \mathcal{M}\}$ tel que $\|\mathbf{v}\|_{H_{1,d}} = 1$:

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^{n-1} \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^n - \mathbf{u}_\sigma^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_\sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^n (\mathbf{u}_\sigma^n - \mathbf{u}_\epsilon^n) \cdot \mathbf{v}_\sigma + \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{u}^n : \nabla_h \mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^n - \mathbf{u}_\sigma^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_\sigma \right| \leq C(1 + \|\mathbf{u}^n\|_{H_{1,d}}^2)$$

$$\Rightarrow \|\check{\partial}_t \mathbf{u}\|_{L^1((0,T);E'_{\mathcal{E}})} \leq CT + C\|\mathbf{u}\|_{L^2((0,T);H_{1,d})}^2 \leq C'.$$

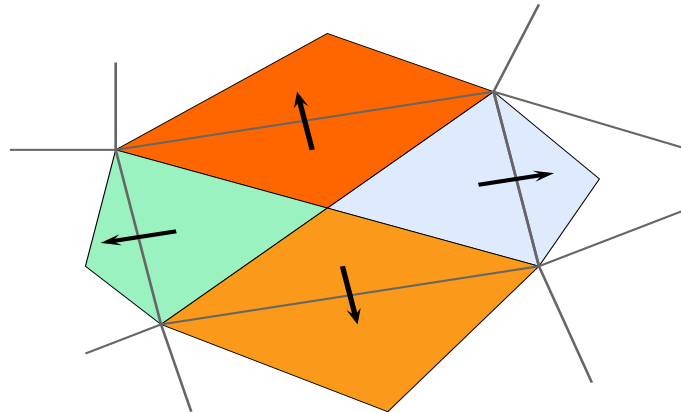
Convergence du schéma

Passage à la limite :

Soit $\phi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$. Soit $\phi_K^n = \phi(t^n, x_K)$. Soit $\nabla^{(m)} \phi^{(m)}$ la fonction constante par morceaux égale sur $D_\sigma \times (t^n, t^{n+1})$ à:

$$(\nabla^{(m)} \phi^{(m)})_\sigma^n = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (\phi_L^n - \phi_K^n) \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

Alors $\nabla^{(m)} \phi^{(m)} \rightharpoonup \nabla \phi$ *faiblement dans* $L^q((0, T) \times \Omega)^d$, pour tout $q \in [1, \infty]$.



Convergence du schéma

Passage à la limite :

- $\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \phi_K^n (\operatorname{div} \mathbf{u})_K^n = - \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| (\nabla \phi)_\sigma^n \cdot \mathbf{u}_\sigma^n \\ &= - \int_{(0,T) \times \Omega} \mathbf{u}^{(m)} \cdot \nabla^{(m)} \phi^{(m)} \, dx \, dt \\ &\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} - \int_{(0,T) \times \Omega} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

- $\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) = 0$

On montre de même que:

$$- \int_{(0,T) \times \Omega} \bar{\rho} \left(\partial_t \phi + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi \right) \, dx \, dt = \int_{\Omega} \rho_0 \phi(\cdot, 0) \, dx.$$

Convergence du schéma

Convergence forte de $\rho^{(m)}$ vers $\bar{\rho}$ dans $L^q((0, T) \times \Omega)$ pour tout $q \in [1, \infty)$:

- On sait que $\rho^{(m)} \rightharpoonup \bar{\rho}$ dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ donc :

$$\|\bar{\rho}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\rho^{(m)}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}.$$



Convergence du schéma

Convergence forte de $\rho^{(m)}$ vers $\bar{\rho}$ dans $L^q((0, T) \times \Omega)$ pour tout $q \in [1, \infty)$:

- On sait que $\rho^{(m)} \rightharpoonup \bar{\rho}$ dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ donc :

$$\|\bar{\rho}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\rho^{(m)}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}.$$

- Pour toute fonction $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe : Il existe $R_K \geq 0$ t.q.

$$\frac{1}{\delta t} (\beta(\rho_K) - \beta(\rho_K^*)) + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \beta(\hat{\rho}_\sigma) \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} + R_K = 0, \quad K \in \mathcal{M}.$$



Convergence du schéma

Convergence forte de $\rho^{(m)}$ vers $\bar{\rho}$ dans $L^q((0, T) \times \Omega)$ pour tout $q \in [1, \infty)$:

- On sait que $\rho^{(m)} \rightharpoonup \bar{\rho}$ dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ donc :

$$\|\bar{\rho}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\rho^{(m)}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}.$$

- Pour $\beta(x) = x^2$: $\|\rho^{(m)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| (\rho_K^n)^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| (\rho_K^0)^2 \leq \|\rho_0\|_{L^2(\Omega)}^2$
-

Convergence du schéma

Convergence forte de $\rho^{(m)}$ vers $\bar{\rho}$ dans $L^q((0, T) \times \Omega)$ pour tout $q \in [1, \infty)$:

- On sait que $\rho^{(m)} \rightharpoonup \bar{\rho}$ dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ donc :

$$\|\bar{\rho}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\rho^{(m)}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}.$$

- Pour $\beta(x) = x^2$: $\|\rho^{(m)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| (\rho_K^n)^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| (\rho_K^0)^2 \leq \|\rho_0\|_{L^2(\Omega)}^2$
-

Convergence du schéma

Convergence forte de $\rho^{(m)}$ vers $\bar{\rho}$ dans $L^q((0, T) \times \Omega)$ pour tout $q \in [1, \infty)$:

- On sait que $\rho^{(m)} \rightharpoonup \bar{\rho}$ dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ donc :

$$\|\bar{\rho}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\rho^{(m)}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}.$$

- Pour $\beta(x) = x^2$: $\|\rho^{(m)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| (\rho_K^n)^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| (\rho_K^0)^2 \leq \|\rho_0\|_{L^2(\Omega)}^2$

- **Di Perna-Lions (89) :**

- $\bar{\rho}$ est solution faible de $\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \bar{u}) = 0$ avec $\bar{u} \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega)^d)$
- Donc $\bar{\rho}$ **solution renormalisée**
- Donc, comme $\operatorname{div} \bar{u} = 0$, pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R})$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \beta(\bar{\rho}) = 0.$$

- Pour tout $t \geq 0$, on a $\|\rho^{(m)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\bar{\rho}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$
-

Convergence du schéma

Convergence forte de $\rho^{(m)}$ vers $\bar{\rho}$ dans $L^q((0, T) \times \Omega)$ pour tout $q \in [1, \infty)$:

- On sait que $\rho^{(m)} \rightharpoonup \bar{\rho}$ dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ donc :

$$\|\bar{\rho}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\rho^{(m)}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}.$$

- Pour $\beta(x) = x^2$: $\|\rho^{(m)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| (\rho_K^n)^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| (\rho_K^0)^2 \leq \|\rho_0\|_{L^2(\Omega)}^2$

- **Di Perna-Lions (89) :**

- $\bar{\rho}$ est solution faible de $\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \bar{u}) = 0$ avec $\bar{u} \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega)^d)$
- Donc $\bar{\rho}$ **solution renormalisée**
- Donc, comme $\operatorname{div} \bar{u} = 0$, pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R})$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \beta(\bar{\rho}) = 0.$$

- Pour tout $t \geq 0$, on a $\|\rho^{(m)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\bar{\rho}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ et en intégrant sur $(0, T)$:

$$\|\rho^{(m)}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)} \leq \|\bar{\rho}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}.$$

Convergence du schéma

- **Lemme :** Soit $\boldsymbol{\phi}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \zeta_K^\sigma \boldsymbol{\phi}_\sigma$ combinaison convexe des $(\boldsymbol{\phi}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}(K)}$.

Soit :

$$R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \boldsymbol{\phi}_\sigma \cdot \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma, \epsilon} \mathbf{u}_\epsilon \quad - \quad \sum_{K \in \mathcal{M}} \boldsymbol{\phi}_K \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K, \sigma} \mathbf{u}_\sigma.$$

(i.e. $R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \approx \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \quad - \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}$)

Alors :

$$|R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})| \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,d}^2 \|\boldsymbol{\phi}\|_{1,d} h^\alpha \text{ avec } \alpha \geq 1/2.$$

Convergence du schéma

- **Lemme :** Soit $\boldsymbol{\phi}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \zeta_K^\sigma \boldsymbol{\phi}_\sigma$ combinaison convexe des $(\boldsymbol{\phi}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}(K)}$.

$$\text{Soit :} \quad R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \boldsymbol{\phi}_\sigma \cdot \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon \quad - \quad \sum_{K \in \mathcal{M}} \boldsymbol{\phi}_K \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} \mathbf{u}_\sigma.$$

$$\left(\text{i.e.} \quad R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \approx \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \quad - \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \right)$$

$$\text{Alors :} \quad |R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})| \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,d}^2 \|\boldsymbol{\phi}\|_{1,d} h^\alpha \text{ avec } \alpha \geq 1/2.$$

- Passage à la limite dans le terme de convection:

$$\sum_n \delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \boldsymbol{\phi}_\sigma^n \cdot \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_\epsilon^n \mathbf{u}_\epsilon^n = \sum_n \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} \boldsymbol{\phi}_K^n \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \hat{\rho}_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^n (\mathbf{u}_\sigma^n \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}) + \sum_n \delta t R(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\phi}^n)$$

Convergence du schéma

- **Lemme :** Soit $\boldsymbol{\phi}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \zeta_K^\sigma \boldsymbol{\phi}_\sigma$ combinaison convexe des $(\boldsymbol{\phi}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}(K)}$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Soit :} \\ \\ \text{Alors :} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \boldsymbol{\phi}_\sigma \cdot \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon \quad - \quad \sum_{K \in \mathcal{M}} \boldsymbol{\phi}_K \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} \mathbf{u}_\sigma. \\ \\ (\text{i.e.} \quad R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \approx \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, dx \quad - \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, dx) \\ \\ |R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})| \leq C \|\mathbf{u}\|_{1,d}^2 \|\boldsymbol{\phi}\|_{1,d} h^\alpha \text{ avec } \alpha \geq 1/2. \end{array}$$

- Passage à la limite dans le terme de convection:

$$\begin{aligned} \sum_n \delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \boldsymbol{\phi}_\sigma^n \cdot \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_\epsilon^n \mathbf{u}_\epsilon^n &= \sum_n \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} \boldsymbol{\phi}_K^n \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \hat{\rho}_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^n (\mathbf{u}_\sigma^n \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}) + \sum_n \delta t R(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\phi}^n) \\ &= - \sum_n \delta t \sum_{\sigma} |D_\sigma| (\hat{\rho}_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^n \otimes \mathbf{u}_\sigma^n) : \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (\boldsymbol{\phi}_L^n - \boldsymbol{\phi}_K^n) \otimes \mathbf{n}_{K,\sigma} + \sum_n \delta t R(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\phi}^n) \\ &= - \int_{(0,T) \times \Omega} (\rho^{(m)} \mathbf{u}^{(m)} \otimes \mathbf{u}^{(m)}) : \nabla^{(m)} \boldsymbol{\phi}^{(m)} \, dx dt + \sum_n \delta t R(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\phi}^n) \end{aligned}$$

Convergence du schéma

- **Lemme :** Soit $\boldsymbol{\phi}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \zeta_K^\sigma \boldsymbol{\phi}_\sigma$ combinaison convexe des $(\boldsymbol{\phi}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}(K)}$.

Soit :	$R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \boldsymbol{\phi}_\sigma \cdot \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon \quad - \quad \sum_{K \in \mathcal{M}} \boldsymbol{\phi}_K \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} \mathbf{u}_\sigma.$
(i.e.)	$R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \approx \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, dx \quad - \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, dx$
Alors :	$ R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \leq C \ \mathbf{u}\ _{1,d}^2 \ \boldsymbol{\phi}\ _{1,d} h^\alpha \text{ avec } \alpha \geq 1/2.$

- Passage à la limite dans le terme de convection:

$$\begin{aligned}
 \sum_n \delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \boldsymbol{\phi}_\sigma^n \cdot \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_\epsilon^n \mathbf{u}_\epsilon^n &= \sum_n \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} \boldsymbol{\phi}_K^n \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \hat{\rho}_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^n (\mathbf{u}_\sigma^n \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}) + \sum_n \delta t R(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\phi}^n) \\
 &= - \sum_n \delta t \sum_{\sigma} |D_\sigma| (\hat{\rho}_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^n \otimes \mathbf{u}_\sigma^n) : \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (\boldsymbol{\phi}_L^n - \boldsymbol{\phi}_K^n) \otimes \mathbf{n}_{K,\sigma} + \sum_n \delta t R(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\phi}^n) \\
 &= - \int_{(0,T) \times \Omega} (\rho^{(m)} \mathbf{u}^{(m)} \otimes \mathbf{u}^{(m)}) : \nabla^{(m)} \boldsymbol{\phi}^{(m)} \, dx dt + \sum_n \delta t R(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\phi}^n) \\
 &\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} - \int_{(0,T) \times \Omega} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : \nabla \boldsymbol{\phi} \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Conclusion

- Preuves de convergence pour des problèmes stationnaires:
 - Stokes compressible avec schémas Crouzeix-Raviart et MAC : (T. Gallouët, J.-C. Latché).
 - Navier-Stokes incompressible avec schéma MAC : R. Herbin, J.-C. Latché, K. Mallem.
 - Consistance et analyse d'erreur pour des grilles localement raffinées : J.-C. Latché, B. Piar, K. Saleh.
 - Passage à la limite pour les équations d'Euler multi-D avec des estimations *supposées* (théorème de Lax) : R. Herbin, J.-C. Latché, N. Therme.
 - Discrétisation en temps :
 - Schéma à correction de pression (Euler et Navier-Stokes).
 - Crank-Nicolson pour la LES.
-

Merci de votre attention.
