Dynamiques de points vortex comme limites ponctuelles de corps solides dans un fluide irrotationnel

Franck Sueur

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Paris 6

Travail en collaboration avec
Olivier Glass (CEREMADE) et Alexandre Munnier (IECN-INRIA)

16 Avril 2014

Un fluide parfait dans une cavité plane

- Pour commencer, imaginons une cavité Ω bornée, plane et remplie d'un fluide parfait.
- La vitesse u du fluide satisfait les équations d'Euler incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \nabla \pi = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} u = 0.$$

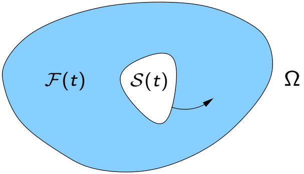
  Ici π désigne la pression.
- Le tourbillon (ou vorticité) $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ satisfait

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = 0.$$

- On constate que $\omega = 0$ est une solution, c'est le cas irrotationnel, sujet de nombreuses études (Kirchoff, Lamb, ...)

Un solide immergé

Ici on va considérer un corps solide $\mathcal{S}(t)$ en mouvement dans cette cavité et on voit que du tourbillon peut se "cacher" dans ce solide.



Mouvement du solide

- Le solide peut se translater : son centre de gravité $h(t)$ évolue dans Ω, et tourner d'un angle $\theta(t)$ par rapport à sa position initiale.
- Les évolutions de h et θ sont données par la loi de Newton :

  masse $\times$ accélération $=$ force exercée par la pression sur la paroi.

  Par exemple,

  $$mh' = \int_{\partial\mathcal{S}(t)} \pi n \,\mathrm{d}s,$$

  où n désigne la normale.

Conditions aux limites

- Les parois du solide et du bord de la cavité sont imperméables de sorte que la composante normale de la vitesse est continue aux interfaces fluide-solide.
- Enfin, la circulation

$$\gamma = \int_{\partial \mathcal{S}(t)} u \cdot \tau \, \mathrm{d}s,$$

autour du solide est constante au cours du temps, c'est un théorème de Kelvin.

Reformulation en une EDO

- Ce système couplant fluide et solide peut se reformuler en une EDO ne portant que sur h et θ.
- Cette équation a une structure d'équation géodésique soumise à une force qui présente des analogies à la force de Lorentz.
- La partie géodésique est une conséquence de l'effet de masse ajoutée.
- La force de type Lorentz est due, elle, à la circulation.

Reformulation en une EDO, bis

Plus précisément, $q := (\vartheta, h_1, h_2)$ vérifie une équation de la forme :

$$M(q)q'' + \langle \Gamma(q), q', q' \rangle = F(q, q'),$$

où

- $\Gamma(q)$ désigne la forme bilinéaire contenant les symboles de Christoffel, et
- $F(q, q')$ est de la forme :

$$F(q, q') := \gamma^2 E(q) + \gamma\, q' \times B(q).$$

Dérivées de forme

- $M(q)$, $\Gamma(q)$, $E(q)$ et $B(q)$ dépendent de q de manière sophistiquée (il faut notamment résoudre des problèmes elliptiques dans le domaine fluide) mais régulière, tant que le solide ne touche pas le bord du solide.
- Par Cauchy-Lipschitz, on est assuré de l'existence d'une solution au moins pour un certain temps.

Deux limites particulaires

- On veut maintenant savoir ce que l'on obtient quand le diamètre du solide converge vers 0.
- On va distinguer deux cas :
  - Cas (i) : la masse du solide est fixe, de sorte qu'à la limite on obtienne une particule ponctuelle massive.
  - Cas (ii) : la masse du solide converge vers 0, de sorte qu'à la limite on obtienne une particule ponctuelle sans masse.

Deux limites particulaires, bis

- Plus précisément, on regarde ce que devient l'équation qui précède pour un solide occupant initialement
$$\mathcal{S}_0^\varepsilon := \varepsilon \mathcal{S}_0$$
quand ε tend vers 0.
- Cas (i) : on suppose que la masse reste fixe au cours du rétrécissement :
$$m^\varepsilon = m \text{ et } \mathcal{J}^\varepsilon = \varepsilon^2 \mathcal{J}.$$
- Cas (ii) : on suppose que la masse tend vers 0 :
$$m^\varepsilon = \varepsilon^\alpha m \text{ et } \mathcal{J}^\varepsilon = \varepsilon^{\alpha+2} \mathcal{J},$$
avec $\alpha > 0$.

Cas (i)

- On introduit la solution $\psi(h,\cdot)$ du problème de Dirichlet :

$$\Delta\psi(h,\cdot) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \psi(h,\cdot) = G(\cdot - h) \text{ on } \partial\Omega,$$

où

$$G(r) := -\frac{1}{2\pi} \ln|r|.$$

- La fonction courant ψ_Ω de Kirchhoff-Routh est alors définie par :

$$\psi_\Omega(x) := \frac{1}{2}\psi(x,x),$$

- et la vitesse de Kirchhoff-Routh u_Ω par

$$u_\Omega := \nabla^\perp \psi_\Omega.$$

Cas (i) : système limite

- On obtient à la limite l'équation :

$$m(h_{(i)})'' = \gamma\big((h_{(i)})' - \gamma u_\Omega(h_{(i)})\big)^\perp.$$

- On a $\liminf T^\varepsilon \geq T_{(i)}$, et la convergence tient pour tout $T \in (0, T_{(i)})$.
- La convergence tient dans $W^{2,\infty}([0,T];\mathbb{R}^2)$ faible-*, et on a des raisons de penser que cette convergence est optimale.

Cas (ii) : système limite

- Dans ce cas on obtient à la limite l'équation d'un point vortex d'intensité γ :

$$(h_{(ii)})' = \gamma u_\Omega(h_{(ii)}).$$

- Cette solution de cette équation est globale (pas de collision avec le bord), et on a $T^\varepsilon \longrightarrow +\infty$.
- La convergence tient dans $W^{1,\infty}([0,T];\mathbb{R}^2)$ faible-*, et on a, là encore, des raisons de penser que cette convergence est optimale.

Idées de preuves : énergie pour $\varepsilon = 1$

- On cherche une forme normale de l'EDO qui permet d'estimer une énergie modulée qui donne une borne uniforme, en ε et en temps fini, de la vitesse du solide.
- On commence par observer que le système, pour $\varepsilon = 1$, préserve une énergie $\mathcal{E}(q, q')$ de la forme

$$\mathcal{E}(q, q') := \frac{1}{2} M(q) q' \cdot q' + U(q),$$

  où $U(q)$ est l'énergie potentielle associéée à $E(q)$.
- En fait

$$U(q) := -\frac{1}{2} \gamma^2 C(q) \text{ et } E(q) = \frac{1}{2} DC(q),$$

  avec $C(q) < 0$.

Idées de preuves : comportement asymptotique de l'énergie

Pour un solide de taille ε on peut développer l'énergie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\varepsilon}(q, q') =& \varepsilon^{\min(2,\alpha)}\, \mathcal{E}(\varepsilon, \vartheta, \hat{p}) \\ & + \cancel{\frac{1}{2}\gamma^2 \big(G(\varepsilon) - C_{\partial\Omega}\big)} - \gamma^2 \Big(\psi_{\Omega}(h) + \varepsilon \psi_c(\vartheta, h)\Big) \\ & + \text{t.o.i.},\end{aligned}$$

où

- $\mathcal{E}(\varepsilon, \vartheta, \hat{p})$ est une forme quadratique en $\hat{p} = (\varepsilon\vartheta', h')$ et induite par une matrice $M_{\partial\Omega}(\vartheta, \varepsilon)$ équivalent, uniformément, à l'identité,
- $M_{\partial\Omega}(\vartheta, \varepsilon)$ ne dépend que de $\mathcal{S}_0$,
- $\psi_c(\vartheta, h)$ ne dépend que de Ω et de $\mathcal{S}_0$.

Cas sans bord extérieur

Si $\Omega = \mathbb{R}^2$, l'EDO devient :

$$M_{\partial\Omega}(\vartheta)\, q'' + \langle \Gamma_{\partial\Omega}(\vartheta), q', q' \rangle = F_{\partial\Omega}(\vartheta, q'),$$

avec

$$\begin{aligned} F_{\partial\Omega}(\vartheta, q') &= \gamma \begin{pmatrix} R(\vartheta)\zeta \cdot h' \\ (h')^\perp - \vartheta' R(\vartheta)\zeta \end{pmatrix} \\ &= \gamma q' \times B_{\partial\Omega}(\vartheta), \end{aligned}$$

avec

$$B_{\partial\Omega}(\vartheta) = \begin{pmatrix} -1 \\ R(\vartheta)\zeta^\perp \end{pmatrix},$$

où ζ ne dépend que de $\mathcal{S}_0$.

Idées de preuves : forme normale

Avec

$$\tilde{p} = \Big(\varepsilon\vartheta', h' - \gamma(u_\Omega(h) + \varepsilon u_c(\theta, h))\Big),$$

et

$$u_c := \nabla_h^\perp \psi_c,$$

l'EDO peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon^{\min(2,\alpha)} M_{\partial\Omega}(\vartheta, \varepsilon)\big(\tilde{p}\big)' + \varepsilon\langle\Gamma_{\partial\Omega}(\vartheta), \tilde{p}, \tilde{p}\rangle = F_{\partial\Omega}(\vartheta, \tilde{p}) + \varepsilon\gamma^2 G(q) + O(\varepsilon^{\min(2,\alpha)}),$$

où $G(q)$ est faiblement gyroscopique de sorte que l'on gagne un facteur ε dans l'estimation d'énergie.

Lemme de Lamb

Pour $u, v \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}_0}; \mathbb{R}^2)$ satisfaisant

- $\operatorname{div} u = \operatorname{div} v = \operatorname{curl} u = \operatorname{curl} v = 0$,
- $u(x) = O(1/|x|)$ et $v(x) = O(1/|x|)$ quand $|x| \to +\infty$,

on a, pour tout $j = 1, 2, 3$,

$$\int_{\partial \mathcal{S}_0} (u \cdot v)(\xi_j \cdot n) \, \mathrm{d}s = \int_{\partial \mathcal{S}_0} \Big((\xi_j \cdot v)(u \cdot n) + (\xi_j \cdot u)(v \cdot n) \Big) \, \mathrm{d}s,$$

où

$$\xi_1(x) := x^\perp, \xi_2(x) := e_1 \text{ et } \xi_3(x) := e_2$$

sont les déplacements élémentaires solides.